مخابرات دیجیتال

منابع: ۱- سیستم های مخابرات شانون کم تعریف الکتاب

2- Communication system engineering by Proakis & Salehi

ارزیابی: میانترم ۸ نمره، پایانترم ۱۲ تا ۱۴ نمره

تکلیف، کوئیز، حضور و غیاب، شفاهی ... ۱ نمره

مقدمه: مخابرات علم انتقال اطلاعات از مبدأ به مقصد است.

اطلاعات چیست؟ هر چیزی که بتوان آن را به معلوم تبدیل نمود یا برای آن پیام تعریف کرد.

کدهای پیام: اطلاعات به چه صورت است؟ با کمک یک سری نماد یا Symbol انجام می‌گیرد

انواع سیگنال: ناشی از وقوع الفبا و یا تکلیف، تصویر

تصویر بر حسب
- logical ← عددی
- electrical ← با ولتاژ، با جریان، با بار

نکته: بین اطلاعات و کدهای پیام اطلاعات تفاوت وجود دارد. اولی یک پیام کلیات دومی کدهای پیام آن می‌تواند متنوع باشد.

در عمل پیام اطلاعات را هم و آنرا هم تحت عنوان پیام یا message نام می‌برند

ارتباط زبان مخابره‌ای و سیستم مخابراتی:

سیستم مخابراتی	زبان مخابره‌ای	
Symbol	حروف الفبا	مثل: ا ب پ
(word) code	کلمات	کد: ۰۱۰۰۱۱۰ (a)
massage	جمله	مثل: a b c

تعریف منبع (Source): عامل تولید کننده اطلاعات را منبع می‌نامیم.

انواع منبع:
- از لحاظ تولید سیگنال:
  - اولیه: تولید خود (تصویر)
  - ثانویه: از روی دیگری
- از لحاظ حافظه:
  - بی حافظه
  - با حافظه

مخابرات I: مخابرات آنالوگ (continues wave) یا مخابرات آنالوگ

مخابرات II: مخابرات دیجیتال است. بنابراین من مخابرات دیجیتال همیشه بیشتر از مخابرات نوع I مخابرات آنالوگ است. اما مخابرات دیجیتال هزینه‌ای بالاتری را مخصوص می‌کند.

مخابرات آنالوگ

ترجمه به سیگنال کد بازگشت نسبت به انتقال

بلوک دیاگرام کلی سیستم مخابراتی:

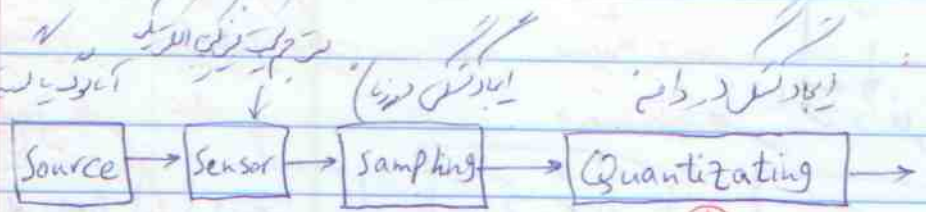
منبع → فرستنده → گیرنده → مقصد

فرستنده: تبدیل اطلاعات به سیگنال و ارسال آن توسط منبع به مقصد تحویل از اطلاعات دریافتی

گیرنده: دریافت سیگنال ارسال شده توسط منبع و ترجمه به اطلاعات واقعی

مشکلات انتقال سیگنال آنالوگ:
- اعوجاج ← راه حل ← equlaizer
- نویز ← راه حل ← مبدل آنالوگ به دیجیتال

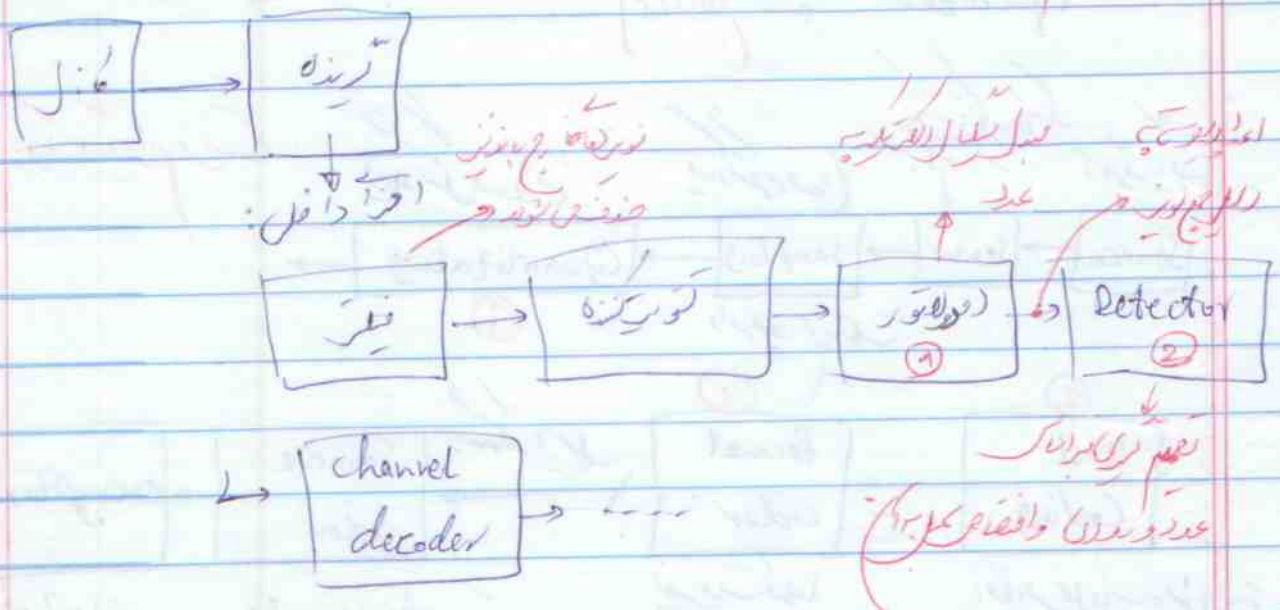
بلوک دیاگرام فرستنده:



- Source: آنالوگ یا دیجیتال
- Sensor: تبدیل کمیت فیزیکی به الکتریکی
- Sampling: ایجاد گسستگی (نمونه برداری)
- Quantizating: ایجاد گسستگی در دامنه
- level Coding: انطباق سطح دامنه با نوع ورودی
- format coder: تغییر فرمت کدها
- Source Coder: فشرده سازی داده ها / حذف redandancy
- encryption: رمزگذاری (opt)
- MUX: چند ورودی کند و آهسته
- Channel Coding: برای مقابله با نویز و تداخل / تشخیص خطا و تصحیح خطا
- Modulator: تبدیل دیجیتال به سیگنال الکتریکی

تقویم: ①، ②، ③ : A/D

بلوک دیاگرام گیرنده:



نوع ۱ و ۲ : synchronizer

معیار کلی سنجش عملکرد سیستم‌های مخابراتی:

۱- آنالوگ: نسبت سیگنال به نویز $\left(\frac{S}{N}\right)$

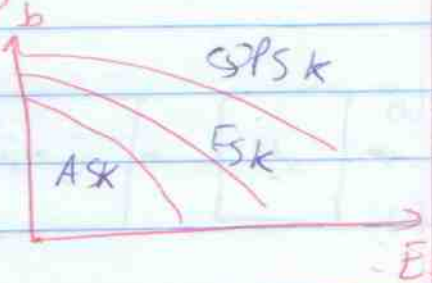
۲- دیجیتال: $\frac{E_b}{N_0}$ ← انرژی بیت به ازای هر بیت

$N_0 = kT$ ← چگالی طیف توان نویز

P_b (احتمال خطا) برحسب $\frac{E_b}{N_0}$: هرچه $\frac{E_b}{N_0}$ بیشتر باشد

حداکثر P_b قابل قبول: 10^{-4}

$P_b < 10^{-4}$ ←



توصیه: دقت شود که سیستم مخابراتی در واقع شبکه‌ای متشکل از لایه‌های مختلف می‌باشد و هر لایه وضایف خاص

دارد.

تعریف اطلاعات:

سوال: تعریف دقیق اطلاعات با چه رابطه‌ای بدست می‌آید؟

نرخ بیت ← مختصر شده عبارت فرا ← کمتر برای ذخیره‌سازی

Source coding ← فشرده‌سازی چه‌دارد؟

کاربرد

نرخ بیت ← حداکثر نرخ قابل ارسال اطلاعات از طریق کانال

شبکه‌ها با شبکه‌ها ← یک کانال با مشخصات معرف چه‌دارد؟

- ارزش اطلاعات وقتی بیشتر است که احتمال وقوع آن کم باشد. هر چه احتمال وقوع کمتر باشد ارزش بیشتر است.

محتوای اطلاعاتی آن بیشتر است.

در نتیجه مقدار ارزش اطلاعاتی با معکوس احتمال رابطه دارد.

تعریف ارزش اطلاعات: مقدار ارزش اطلاعاتی برابر با حاصل تعداد سمبل‌ها لازم (برای نمایش اطلاعات) برای بیان حاصل آن حادثه می‌باشد.

حداقل
(تعداد سوال‌هایی که لازم است بپرسیم تا آن) مقدار اطلاعات حاصل یا خالص موجود در پیام m

$$I(m) = \log_n \frac{1}{P(m)}$$

$I(m)$: پیام m که دارای اطلاعات است

$P(m)$: احتمال وقوع پیام m

n: تعداد کل علائم الفبای مورد استفاده برای پیام اطلاعات

محاسبه آن:

1) یافتن کل پیام‌های ممکن 2) یافتن احتمال وقوع هر یک از آن‌ها

3) یافتن ارزش اطلاعاتی هر یک از آن‌ها

اگر $n=2$ باشد، واحد سنجش را بیت می‌نامیم.

$$I = \log_2 \frac{1}{P} \quad , \quad I = \ln \frac{1}{P} \quad , \quad I = \log_{10} \frac{1}{P}$$

بر حسب بیت — بر حسب natural — بر حسب dit (decimal)

نکته: احتمال وقوع پیام‌های مختلف با هم متفاوت است. ارزش اطلاعاتی آن‌ها در نتیجه با هم متفاوت است.

برای رهایی از متغیر بودن مقدار ارزش اطلاعاتی پیام‌های مختلف، از متوسط‌گیری بین آن‌ها استفاده می‌کنیم که این مقدار متوسط را آنتروپی می‌نامیم.

آنتروپی یا متوسط — تعریف ریاضی

$$H = E[I] = \sum_{i=1}^{n} P_i I_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{1}{P_i} = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i$$

$$H = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i$$

$$0 \leq P_i \leq 1 \rightarrow 0 < I_i < \infty$$

نکته: صدالشعاع آنتروپی زمانی حداکثر خواهد بود که همه پیام‌ها احتمال یکسان داشته باشند.

$$H_{max} = \log_2 n \rightarrow \text{تعداد کل پیام‌ها}, \quad P_1 = P_2 = \dots = P_n$$

((واحد اطلاعی) ب ع مقداری
((واحد وزنی) مثلاً g است

$$I(m) = \log_m \frac{1}{P(m)}$$ اگر $m=2$ ← $I(m)$ بیت باینری گوییم

توسعه بحث: اندازه اطلاعاتی به حالت چندپیامی:

۱- پیام A و B داریم:

$$I(A,B) = \log_m \frac{1}{P(A,B)}$$

اطلاعات حاصل از وقوع توأم A و B

رابطه‌ای مشترک بین A و B باعث ایجاد اطلاعات مشترک بین آن‌ها نمی‌گردد. هر دو پیام آشکار شده‌اند.

if A, B independent:

$$\begin{cases} P(A,B) = P(A)\cdot P(B) \\ I(A,B) = I(A) + I(B) \end{cases}$$

اگر رابطه‌ای (مثلاً علی) بین A و B وجود دارد؛ داریم:

$$I(A,B) \leq I(A) + I(B)$$

2- اطلاعات شرطی: ابتدا B آشکار شده و سپس A

$I(A|B)$ اطلاعات حاصل از A به شرطی که B داشته

فایده: B به عنوان یک عامل کمکی می‌تواند بخشی از اطلاعات A را خاصی کند:

$$I(A|B) \leq I(A)$$

$$I(A|B) \overset{\Delta}{=} \log \frac{1}{P(A|B)}$$

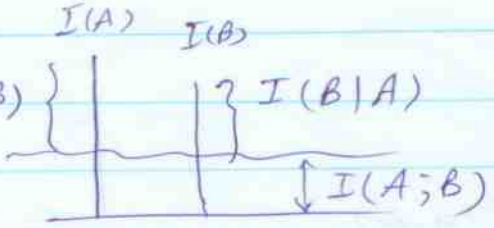
$$\text{if } A \overset{\text{مستقل}}{\perp\!\!\!\perp} B \rightsquigarrow I(A|B) = I(A)$$

(اطلاعات جانبی) Side information

3- اطلاعات متقابل (Mutual inf) بخش اطلاعات مشترک A, B:

$$I(A;B) = I(B;A)$$

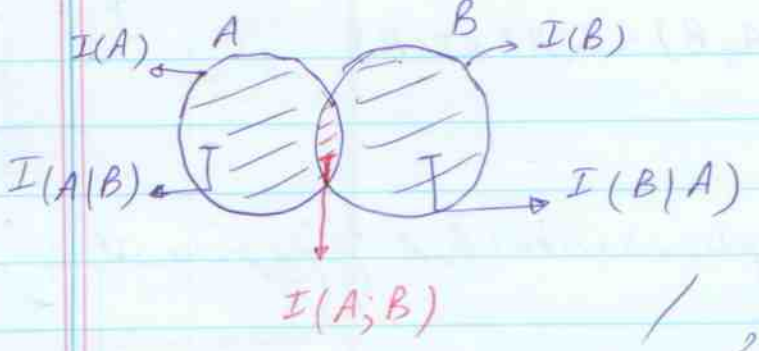
$$I(A;B) \triangleq \log \frac{P(A,B)}{P(A).P(B)}$$



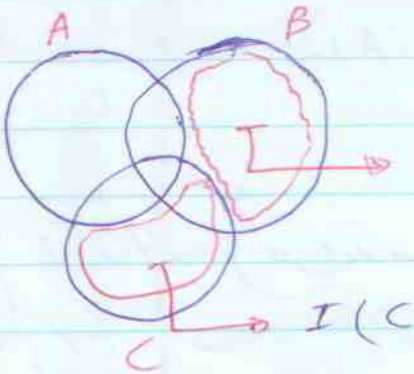
$$\begin{cases} I(A) = I(A;B) + I(A|B) & I(A|B): \text{بخش مستقل از } B \\ I(B) = I(A;B) + I(B|A) & I(A;B): \text{بخش مشترک } B \end{cases} \quad \text{اطلاعات } A$$

قضیه: $A \perp\!\!\!\perp B \longrightarrow I(A;B) = 0$

تفسیر نمودار ون برای بیان اطلاعات:



برای مواردی تعداد پیشتر بخش نمودار ون کمک بیشتری می‌کند:



$$I(B|A,C) = I(B) - I(A;B) - I(A;C) + I(A;B;C)$$

$$I(C|A)$$

اجتماع سه: $I(A,B,C)$

اشتراک سه: $I(A;B;C)$

مشابه بحث قبل برای آنتروپی نرخ اطلاعات توسعه به حالاتی که چند پیام با هم ارسال می‌شوند، وجود دارد.

منبع بدون حافظه H ← $I(m_1)$ $I(m_2)$ ⋮ $I(m_n)$ — توسط بیت‌ها → $\bar{H}$

اطلاعات توسط بیت‌ها از یک سمبل $\bar{H}$

در واقع این کمیت میزان عدم قطعیت از پیام‌ها را بیان می‌کند.

برای یک رشته طولانی متشکل از N سمبل، می‌توان $N.H$ بیت در نظر گرفت

مثال: کیبورد — ALI RAFT Khune

هر حرف ۲ بیت

$\bar{H} = (2, 4, 3, \dots)$ توسط بیت‌ها → $\bar{H} = 4.75$ bit

مثلاً برای رشته متشکل از ۲۰۰ سمبل: $N.H = 200 \times 4.75$

$\bar{H}$ بایت ← حجم حافظه مورد نیاز ← برای کاربرد ذخیره‌سازی

پهنای باند مورد نیاز ← ، ، انتقال

نرخ

منبع اطلاعات خود را (هر) سمبل‌ها هستند با نرخ یا سرعت R_s (Symbol Rate) سمبل بر ثانیه

بیان می‌کند.

هر سمبل به طور متوسط دارای ارزش اطلاعاتی H بیت می‌باشد.

$R_b = R_s . H$ — R_s و H توأماً تعیین‌کننده R_b هستند.

R_b bit rate (bit per sec)

H: ذات یا کیفیت منبع

که متکی بر هم هستند.

R_s: سرعت منبع

$H \rightarrow$ نرخ ضابطه $\left(\frac{bit}{sym}\right)$ ، $R_s \rightarrow$ نرخ علامت $\left(\frac{sym}{sec}\right)$ ، $R_b \rightarrow$ نرخ بیت $\left(\frac{bit}{sec}\right)$

$R_b = R_s \cdot H$ H یا آنتروپی منبع وابسته به نوع منبع و نحوه عملکرد آن می‌باشد و

معمولاً از نوع لگاریتمی یا الفبای مورد استفاده است.

ماکزیمم H به ازای عملکرد بهینه زمانی حاصل می‌شود که از توزیع یکنواخت برای استفاده از کلمات استفاده شود.

منبعی با $M=3$ علامت $\{S_1, S_2, S_3\}$ با احتمالات $P_1\ P_2\ P_3$

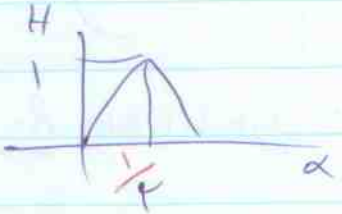
$H_{max} = \log_2 M \rightarrow$ تعداد کل علائم

$P(m_1) = P(m_2) = \dots = P(m_M) \Rightarrow H(max) = I(m_1) = \dots = I(m_M)$

مثال: دو حالتی باینری:

$\left.\begin{matrix} 0 \rightarrow \alpha \\ 1 \rightarrow 1-\alpha \end{matrix}\right\} H_\alpha = -[\alpha \log \alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha)]$

if $\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow H_{max} = \log_2^2 = 1$



نکته: در حالت توزیع یکنواخت و $H = H_{max}$ ، کدینگ کارآیی لازم جواب بهینه کدینگ خواهد بود.

$H \rightarrow$ نرخ فعلی منبع

$H_{max} \rightarrow$ نرخ بهینه ممکن

$e = \frac{H}{H_{max}} = \frac{H \text{ موجود}}{H \text{ بهینه}}$

برای تشخیص کیفی عملکرد ← راندمان منبع

منظور از کدینگ کارآ کدینگ S_0 است: کدینگ ← کلمات رمز

S_1: 0
S_2: 01
S_3: 10
S_4: 11
S_5: 100

اگر H برای یک منبع یکسان و مشخص اطلاعات منبع را بیان کرد. $0 \le e \le 1$

یعنی با کدینگ توسط Source coder می‌توان سیستم را H_{max} رساند.

رابطه e و ρ است:

$$\rho = 1 - e$$

ρ ← redundancy (اضافات منبع)

جمع‌بندی:

$H = H_{max}$ ← کدگذاری بدون کاهش

$H < H_{max}$ ← به کدینگ بهتری نیاز دارد

برای حصول نتیجه بهتر در بررسی محتوای خالص اطلاعاتی خروجی منبع (به جای بررسی تک تک حروف)، از ترکیب چند تایی آنها استفاده می‌کنیم.

توجه: از $P(m_1, m_2)$ می‌توان به $P(m_1)$ رسید. با انتگرال‌گیری از توابع احتمال گیری marginal

بنابراین اطلاعات حاصل از $P(m_1, m_2)$ با اطلاعات از $P(m_1)$ خواهد بود.

$$(?)\quad P(m_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(m_1, m_2)\, dm_2$$

نکات خاص: وابستگی یا ارتباط بین حرف‌های متوالی، مقداری اطلاعات مشترک بین آنها ایجاد می‌کند که باعث کاهش نرخ آنتروپی می‌گردد.

~~نتیجه: منبع حافظه‌دار ← کل گذشته تاثیر دارد ← H کندتر~~

نتیجه: منبع بدون حافظه: سمبل‌های مختلف واقعاً بی‌ربط هستند.

منبع حافظه‌دار را منبع مارکوف می‌نامیم. برای منبع مارکوف، عمق حافظه تعیین می‌شود.

عمق حافظه: تعداد سمبل‌های قبلی که بر سمبل فعلی تأثیر دارند.

برای یک منبع مارکوف مرتبه ۳:

$$P[S_n = m \mid S_{n-1}, S_{n-2}, S_{n-3}]$$

عمق حافظه = ۳

بیان نحوه محاسبه در منبع مارکوف

مانند درس قبل، از مفهوم حالت استفاده می‌کنیم. منظور از حالت یک وضعیت بود برای حافظه منبع است. اگر منبع مرتبه N و الفبای ورودی M داشته باشیم، کلاً M^N حالت برای حافظه داخلی آن (احتمالاً) پذیرا است.

تعداد سمبل‌ها

حافظه منبع: $m_1 \mid \square \mid \square \mid \square \mid m_M$

N تا

مثال: برای منبع باینری مارکوف مرتبه ۲:

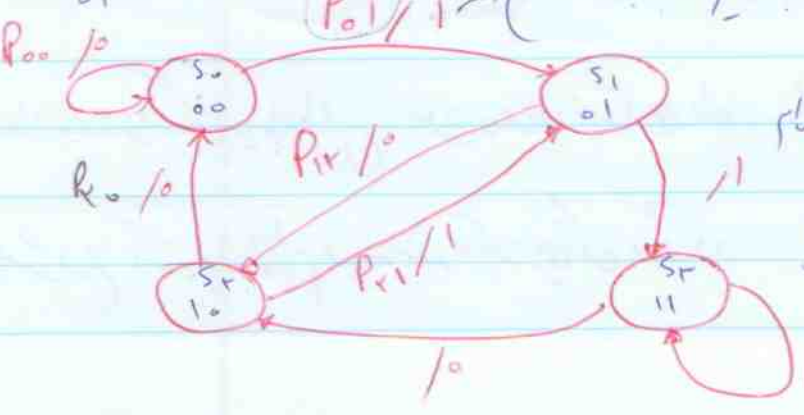
تعداد مورد عمل

$a_2 \mid a_2$ ← حافظه منبع

a_2

۴ حالت

از هر حالت، به تعداد M خروجی داریم. خروجی صادر شده از منبع



P_{ij}: احتمال گذار از حالت i به j

(که در واقع) احتمال صدور خروجی متناظر با آن حالت می‌باشد.

نحوه‌ی محاسبه‌ی آنتروپی برای منابع مارکوف:

با توجه به اینکه این منبع حالت‌های مختلف دارد، در هر حالت هم آنتروپی متفاوتی دارد.

S_0 S_1 S_2 S_3

↓ ↓ ↓ ↓

H_0 H_1 H_2 H_3 ← H_iها

تعیین H = ؟

$$H = E[H_i] = \sum_{i=1}^{M} P_i \cdot H_i$$

H ← آنتروپی در حالت نام

↳ احتمال آمدن در حالت نام برابر

$$H_i = \sum P_{ij} \log P_{ij}$$

↳ روی حالت‌های خروجی از حالت نام

P_i: (با توجه به حالت‌های ورودی به حالت) احتمال در حالت نام قرار گرفتن.

$$\begin{cases} P_0 = P_{00} \times P_0 + P_{20} \times P_2 \\ P_1 = P_{01} \times P_0 + P_{21} \times P_{21} \\ P_2 \\ P_3 \end{cases}$$

با حل دستگاه P_iها محاسبه می‌شوند.

رابطه‌ی کمکی: $\sum P_i = 1$

حالا به اینجا منبع را بررسی می‌کنیم.

فشرده‌سازی

طول متوسط کلمه: $\bar{n}$

منبع → کدگذار منبع → کدگذار کانال

Source coder

در بهترین روش کدینگ منبع، باید نرخ خروجی برابر با H (نرخ منبع) باشد.

در حالت کلی: $\bar{n} > H$ ← کدگذار بهینه ← if $\bar{n} = H$ *

$e' = \frac{H}{\bar{n}} = \frac{\text{حداقل تعداد بیت‌های لازم برای پیام}}{\text{تعداد بیت‌های خروجی کدگذار}}$ ، $\rho' = 1 - e'$

* $H = E[I(m)]$ ، $I(m)$: حداقل تعداد بیت‌های لازم برای پیام m

روش‌های متعددی برای کدگذاری منبع وجود دارد که روش جامع و بهینه‌ای به صورت کلی یافت نشده و مقایسه بین آن‌ها از طریق e' صورت می‌گیرد.

سه روش نوعی: ۱- هافمن ۲- شانون ۳- شانون-فانو

۱) روش هافمن:

1. مرتب کردن حروف‌پیام‌ها (سمبل‌ها)ی خروجی منبع
2. یافتن احتمال وقوع هر کدام از آن‌ها
3. رتبه‌بندی پیام‌ها براساس احتمال (وقوعشان) به صورت نزولی
4. دو سمبل آخر (با کمترین احتمالات) را تلفیق کرده و به جای آن‌ها یک سمبل مجازی با احتمالی برابر با مجموع احتمالات آن دو قرار می‌دهیم.
5. روند فوق را تکرار می‌کنیم تا جایی که تعداد به ۲ برسد، ادامه می‌دهیم

۶- بعد از اتمام کار، در هر مرحله کد تلفیق به یک شاخه ۱ و به دیگری ۰ را اختصاص می‌دهیم.

۷- برای یافتن کد متناظر با هر سمبل از انتها به ابتدای آن عمل حرکت و در طول مسیر ۰ و ۱ هایی که برخورد می‌کنیم را کنار هم می‌چینیم.

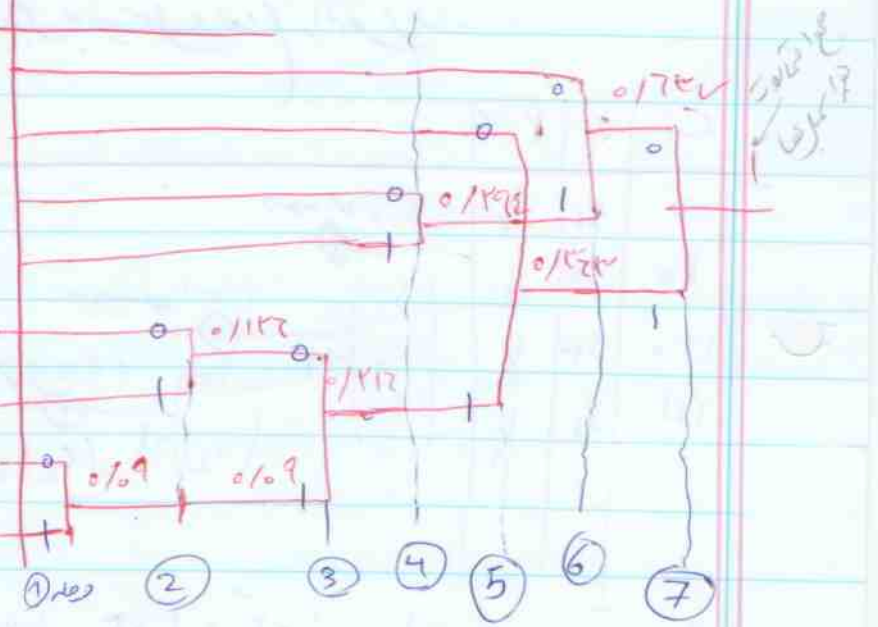
نکات: ۱، طول کدها متغیر و متناسب با احتمال وقوع هر کدام به دست می‌آید.

۲، منظور از non prefix این است که هیچ کد (کلمه) نباید پیشوند کد دیگری باشد.

۳، کتاب کد (code book) باید بین دو طرف مشترک باشد. (فرستنده و گیرنده) (Ci و Si)

مثال: محاسبه یافتن کدها در مثال ۲ سمبل از یک A و احتمالات زیر:

n	c_i	s_i	p_i
۱	۰۰	s_1	۰/۴۳
۲	۱۰	s_2	۰/۱۴۷
۳	۰۱۰	s_3	۰/۱۲۷
۴	۰۱۱	s_4	۰/۱۲۷
۵	۱۱۰۰	s_5	۰/۰۶۳
۶	۱۱۰۱	s_6	۰/۰۲۳
۷	۱۱۱۰	s_7	۰/۰۲۳
۸	۱۱۱۱	s_8	۰/۰۲۷



ادامه نکات:

۴، محاسبه راندمان کدینگ (e'):

$$e' = \frac{H}{\bar{n}}$$

$$H = -\sum_{i=1}^{\hat{}} P_i \log P_i \quad , \quad \bar{n} = E[n] = \sum_{i=1}^{\hat{}} P_i \cdot n_i$$

3) روش شانون - فانو:

۱ و ۲. مانند روش هافمن است. به صورت نزولی برحسب احتمال مرتب می‌شوند.

۴- شروع به دسته‌بندی سمبل‌های سانسور. در هر مرحله با توجه به اینکه مجموع احتمال سمبل‌های دو دسته‌ی حاصل از تقسیم، کمترین اختلاف را با هم داشته باشند.

۵- تقسیم‌بندی تا جایی که ادامه می‌یابد (یعنی دسته‌ها تک سمبل باقی مانده باشند).

۶- اختصاص ۰ و ۱ به دو دسته حاصل از تقسیم‌بندی ۵.

۷- توالی ۰ و ۱ها متناظر با دسته‌های نهایی هر سمبل، کدآن را مشخص می‌کند.

C_i	S_i	P_i
۰	S_1	۱/۲
۱۰	S_2	۱/۴
۱۱۰	S_3	۱/۸
۱۱۱	S_4	۱/۸

(S_1) ۷ → ۰ ①

S_2, S_3, S_4 → ۱ ; (S_2, S_3, S_4) ۷ → ۰ ②

S_3, S_4 → ۱ ; (S_3, S_4) ۷ → ۰ ③

S_4 → ۱ ; (S_4) ۷ → ۱

$$e' = \frac{H}{\bar{n}}$$

$$\bar{n} = E[n] = \sum_{i=1}^{4} P_i n_i$$

$$\hookrightarrow \bar{n} = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 + \frac{1}{8}\times 3 = 1.75 \qquad \text{و} \quad e'_{sc} = \frac{H}{\bar{n}} = 1$$

$$H = -\sum P_i \log_2 P_i = -\left(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}\right) = 1.75$$

$$e = \frac{H}{H_{max}}, \quad H_{max} = \log_2 5 = 2 \rightsquigarrow e_s = \frac{1.75}{2} = 0.875$$

2) روش شانون:

۱) x_i: مانند قبل است.

۲- یافتن توزیع تجمعی علامت‌ها (F_i) یا بیشتر نیز

۳- یافتن تعداد بیت‌های کد هر علامت (n_i^*) با استفاده از نابرابری زیر:

$$\log_2 \frac{1}{P_i} \leq n_i < 1 + \log_2 \frac{1}{P_i} \qquad \underbrace{I(x_i)}$$

۴- یافتن کد هر علامت با استفاده از بسط دودویی F_i (بسط دودویی F_i تا n_i رقم اعشار)

x_1: $F_1 = 0$

x_2: $F_2 = \frac{9}{32} = \frac{8}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}$ ← 0.00101

x_3: $F_3 = \frac{18}{32} = \frac{16}{32} + \frac{2}{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ ← 0.1001

x_4: $F_4 = \frac{21}{32} = \frac{16}{32} + \frac{4}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$ ← 0.1010

x_5: $F_5 = \frac{23}{32} = \frac{16}{32} + \frac{4}{32} + \frac{2}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ ← 0.1011

x_6: $F_6 = \frac{25}{32} = \frac{16}{32} + \frac{8}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32}$ ← 0.1101

x_7: $F_7 = \frac{30}{32} = \frac{16}{32} + \frac{8}{32} + \frac{4}{32} + \frac{2}{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ← 0.1111

مثال: حل با ۷ علامت و احتمالات زیر مفروضات به روش شانون کدگذاری کنید.

x_i	P_i	F_i	n_i^*	کد
x_1	$\frac{9}{32}$	$F_1 = 0$	۲	۰۰
x_2	$\frac{9}{32}$	$F_2 = F_1 + P_1 = \frac{9}{32}$	۲	۰۱
x_3	$\frac{4}{32}$	$\frac{18}{32}$	۴	۱۰۰۱
x_4	$\frac{3}{32}$	$\frac{21}{32}$	۴	۱۰۱۰
x_5	$\frac{2}{32}$	$\frac{23}{32}$	۴	۱۰۱۱
x_6	$\frac{2}{32}$	$\frac{25}{32}$	۴	۱۱۰۱
x_7	$\frac{1}{32}$	$F_7 = F_6 + P_6 = \frac{30}{32}$	۴	۱۱۱۱

توجه:

$$\overline{b_0 b_1 b_2} : \begin{cases} \text{بطور باینری} & b_0 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_2 \times 2^0 \\ \text{بطور باینری اعشاری} & b_0 2^{-3} + b_1 \times 2^{-2} + b_2 \times 2^{-1} \end{cases}$$

اما در این روش بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$C_i = b_1 b_2 b_3 \ldots \equiv \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{8} + \cdots$$

مثال:

$$\frac{9}{32} = \frac{8+1}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} \rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = 0 \\ b_4 = 0 \\ b_5 = 1 \end{cases}$$

توجه: کلاً روش هافمن محبوبیت بیشتری دارد.

روش‌های دیگر coding:

Limpel-Ziv (Data)

Arithmetic coding

RLE (Fax)

Run length coding

Run ← یک رشته بیت متوالی یکسان

مثال: 1111111000000……1000 — یک Run به طول مثلاً ۱۰ / یک Run به طول ۵

در این روش فقط طول Run ها فرستاده می‌شود: 10, 5, …

بعد از این هم، این اعداد با روش هافمن کد می‌شوند.

آنالیز اطلاعات منبع و Source coding

تئوری اطلاعات: بحث حداکثر سرعت قابل انتقال اطلاعات بر حسب ظرفیت کانال، به صورت نظری و بدون خطا است. علت محدودیت نویز، اعوجاج، تداخل، تضعیف است.

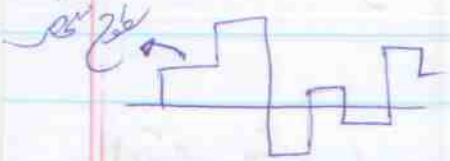
بدون به حل رسیدن مسئله ها — اکولایزر + کدینگ

انواع کانال ها: کانال پیوسته / کانال گسسته

توجه: پیوسته یا گسستگی مربوط به اطلاعات عبوری از کانال است و نه خود کانال

منظور از پیوسته و گسسته بودن اطلاعات در آنالیز و در زمان

→ کانال پیوسته

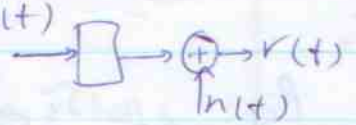


→ گسسته

نحوه توصیف عملکرد کانال:

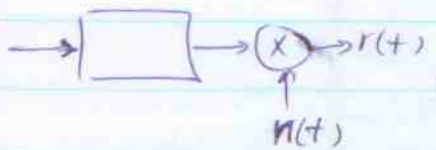
کانال پیوسته، دچار دو نوع نویز می شود:

۱- نویز جمعی:



$r(t) = s(t) + n(t)$

۲- نویز ضربی



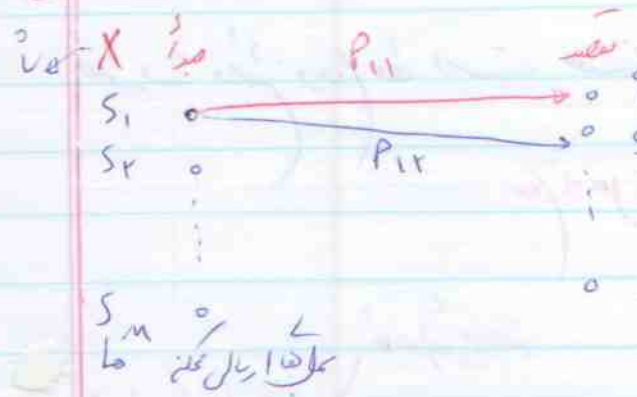
$r(t) = s(t) \cdot n(t)$

توصیف نموداری

کانال گسسته: { بدون حافظه / با حافظه

نمودار گذار کانال:

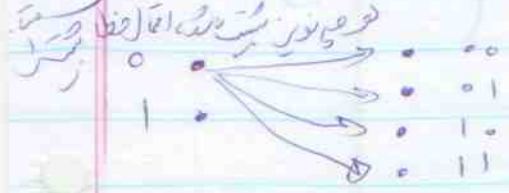
۱) توصیف نموداری:

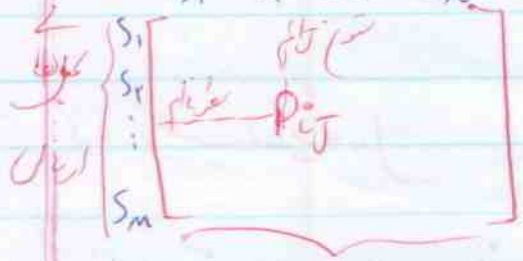


$N \geq M$

و انتقال ممکن (صحیح یا غلط) باید علی شخص شود. P_{ij} احتمال دریافت y_j با شرط ارسال x_i در یک خانه یک را ارسال کرده باشد.

و) اطلاعات برای عبور از کانال به صورت آنالوگ است، مثلاً اگر بران آشکارسازی شبکه از A/D دوبی استفاده کنیم داریم: $N > M$:





۲) توصیف ماتریسی:

ماتریس احتمال کانال

احتمال اینکه x_i ارسال و y_j دریافت شده باشد: P_{ij}

احتمال گذار n ام:

در مورد خواص کانال با n احتمال مختلف سروکار داریم:

۱- احتمال نقاط شروع ۲- احتمال نقاط انتها ۳- احتمال برداها

۴- احتمال جهت چپ به راست ۵- احتمال جهت راست به چپ

۱) احتمال نقاط شروع: $P(X=S_i)$

احتمال ظهور سمبل‌ها در ورودی کانال ($P_i^{t_{ارسال}}$)، احتمال ارسال سمبل i ام که در P_i ضرب است.

۲) احتمال نقاط انتها: $P(Y=S_J)$

احتمال دریافت سمبل‌ها در خروجی کانال ($P_J^{r_{دریافت}}$)

۳) احتمال برداها (احتمال نقطه ابتدا و احتمال جهت به طور هم‌زمان) $P(X=S_i, Y=S_J)$

احتمال وقوع توأم نقاط ابتدا و انتها (P_{iJ}^{tr})

$P_{iJ}^{tr} = P_i^t \cdot P_{iJ}$ که P_{iJ}: برداری که نقطه ابتدا و انتها مشخص باشد.

۴) احتمال جهت چپ به راست:

$P_{iJ} = P(Y=S_J \mid X=S_i)$

۵) احتمال شرطی عکس‌ها است.

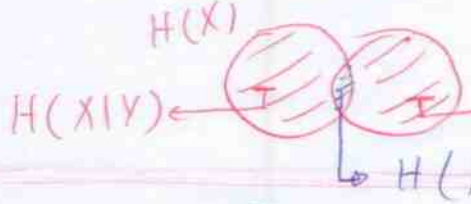
۵) احتمال جهت راست به چپ: $P_{Ji} = P(X=S_i \mid Y=S_J)$

اگر خروجی سمبل دریافت شده باشد، چقدر احتمال دارد که از کدام سمبل فرستاده شده باشد.

اصول	نوع احتمال	مفهوم	نماد	رابطه
① نقطه ابتدا	نقطه ای	$P(X=S_i)$	P_i^t	① توقع ممکن می‌شود ② مجموع احتمال پروازهای خروجی مستقیم از آن نقطه
② نقطه انتها	نقطه ای	$P(Y=S_J)$	P_J^r	مجموع احتمال پروازهای مستقیم منتهی به آن نقطه
③ پرواز	پروازی	$P(X=S_i, Y=S_J)$	P_{iJ}^{tr}	$P_{iJ}^{tr} = P_i^t \cdot P_{iJ} = P_J^r \cdot P_{Ji}$
④ جهت ابتدا به انتها	جهتی	$P(Y=S_J \mid X=S_i)$	P_{iJ}	$P_{iJ} = \frac{P_{iJ}^{tr}}{P_i^t}$
⑤ جهت انتها به ابتدا	جهتی	$P(X=S_i \mid Y=S_J)$	P_{Ji}	$P_{Ji} = \frac{P_{iJ}^{tr}}{P_J^r}$

رابطه	مفهوم آنتروپی	آنتروپی H	رابطه
$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} P_i^t \log P_i^t$	متوسط اطلاعات ورودی به کانال	$H(X)$	$P_i^t = \sum_{J=1}^{m} P_J^r \cdot P_{Ji}$
$H(y) = -\sum_{j=1}^{m} P_J^r \log P_J^r$	متوسط اطلاعات خروجی از کانال	$H(Y)$	$P_J^r = \sum_{i=1}^{n} P_i^t P_{iJ}$
$H(X,Y) = -\sum_{x}\sum_{y} P_{iJ}^{tr} \cdot \log P_{iJ}^{tr}$	متوسط اطلاعات توأم ناشی از ورود و خروجی یعنی ناشی از فرستنده و گیرنده	$H(X,Y)$	
$H(Y\|X) = -\sum_{x}\sum_{y} P_{iJ}^{tr} \cdot \log P_{iJ}$	اطلاعات ناشی از نویز اضافه شده به کانال	$H(Y\|X)$	
$H(X\|Y) = -\sum_{x}\sum_{y} P_{iJ}^{tr} \cdot \log P_{Ji}$	اطلاعات مفقود کانال برای ورودی اطلاعات بخشی از اطلاعات ورودی که موفق به عبور از کانال نشده است.	$H(X/Y)$	

نظم کامل ایجاد توزیعات



$$\begin{cases} H(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \\ H(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \end{cases}$$

توجه:

$$H(X,Y) = E[I(X,Y)] = \sum_X \sum_Y P(X,Y) \cdot I(X,Y)$$

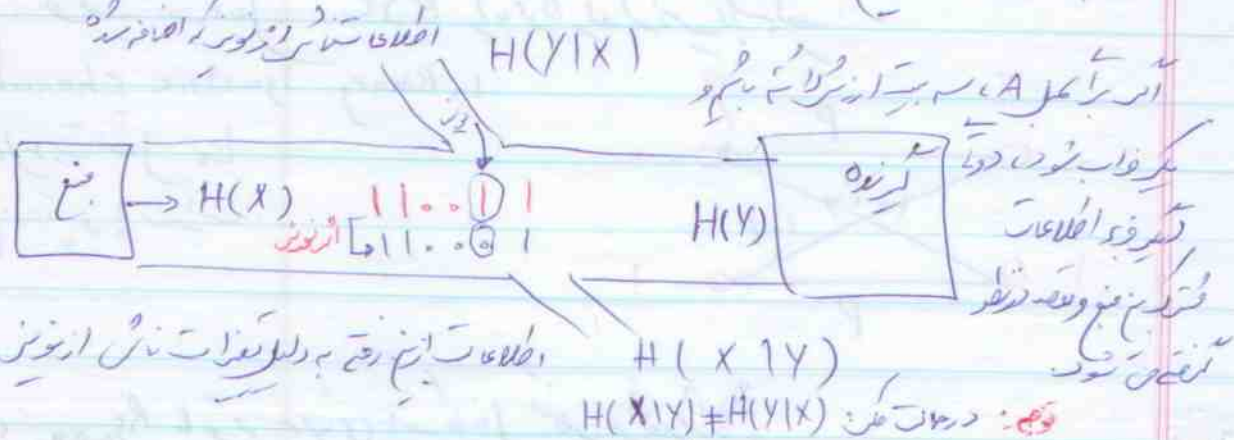
$$H(X|Y) = E[I(X|Y)] = \sum \sum P(X,Y) \cdot I(X|Y)$$

$$H(Y|X) = E[I(Y|X)] = \sum \sum P(X,Y) \cdot I(Y|X)$$

سوال: حجم اطلاعات مجوری از کانال چقدر است؟

$H(X;Y)$ = اطلاعات مجوری

حجم اطلاعاتی که مشترک منبع ورودی و خروجی



اگر برآیند عمل A، سه بیت از سمت راست باشد

یک قاب شود دوتا

تفاوت فی اطلاعات

مشترک منبع و گیرنده در نظر

گرفته می شود

اطلاعات این وقتی به دلیل تغییرات ناشی از نویز

توجه: در حالت کلی: $H(X|Y) \neq H(Y|X)$

خلاصه: $H(X;Y)$: توسط اطلاعات مجوری یافته از کانال به ازای هر عمل ارسالی

اطلاعات توسط فرستنده تولید شده

R_S: سرعت اعمال مجوری به کانال

$R_b = R_S \cdot H(X;Y)$ نرخ بیت اطلاعاتی مجوری یافته از کانال (ظرفیت عملی کانال)

در حالت کلی، ظرفیت کانال را حداکثر نرخ بیت مجوری قابل انتقال از کانال تعریف می کنیم.

capacity

$$R_{bman} = C = R_S \cdot H_{max}(X;Y)$$

روندکار برای محاسبه ظرفیت کانال

۱/ محاسبه $H(X;Y)$

۲/ محاسبه max آنتروپی شرطی (با شرط بیز)

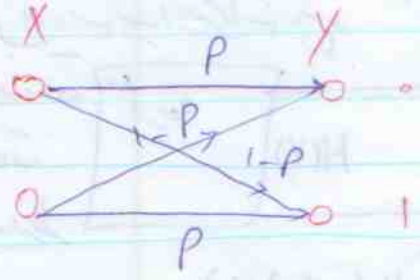
۳/ محاسبه C با رابطه فوق

مثال: ظرفیت یک کانال BSC را با نمودار زیر محاسبه کنید:

BSC ← Binary Symetric channel

احتمال درست انتقال ها

یافتن $H(X;Y)$ و H_{max} است.



توجه: R_{Smax} با توجه به پهنای باند کانال مشخص خواهد شد.

نکته: سه عامل بر C تأثیر گذارند:

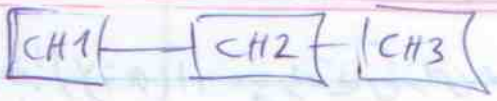
۱/ پهنای باند کانال ← R_{Smax}

۲/ مقدار نویز ← نحوه کدگذاری یا کیفیت خود کانال

۳/ تابع توزیع احتمال در روش به کیفیت استفاده از کانال

که توجه میکند از کانال استفاده میکند، H با کدام تابع بالاتر، C بیشتر می‌شود.

تذکر:



۱۱۱ عبور

↓ تزریب کانال

یادآوری:

↳ $H(X;Y)$: توسط اطلاعات عبور کرده به طور صحیح از کانال برآورد

در سمبل ارسالی یا خروجی اعمال شده

به طور متوسط

مثلاً: $H(X;Y) = ۳$ ⇒ ۳ بیت اطلاعات (سمبل) که ارسال شود، ۳ بیت اطلاعات تا درست منتقل شود.

[bit Rate (bps) ← Symbol Rate / baud Rate]

$R_b = R_s . H(X;Y)$

↳ تعداد بیت‌هایی که به طور صحیح عبور کند

$$C = Max[R_b] = R_{s\,max} \cdot \underset{max}{H(X;Y)}$$

$$H_{max}(x,y) = Max \begin{cases} H(Y) - H(Y|X) \\ \downarrow \\ H(X) - H(X|Y) \end{cases} \quad (1)$$

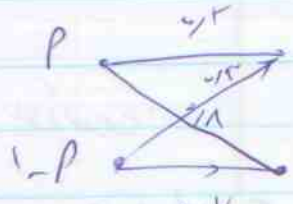
است.

معمولاً از رابطه (1) استفاده می‌کنیم چون $H(Y|X)$ که شرط $P(Y|X)$ (P_{ij}) را به راحتی می‌توان به دست آورد

حداکثر در رابطه $H(X;Y)$ با ازای کدام توزیع‌های آزاد موجود بگیرد، برای max شدن آن،

$\frac{\partial H(X;Y)}{\partial \text{پارامتر}} = 0$ ، برای حل دستگاه معادله، مقادیر پارامتر آن‌ها را بیابیم تا H_{max} شود!

بیایید این را امتحان کنیم:



نسبت به P مشتق می‌گیریم. ⟵

عامل دوم $R_{s_{max}}$: پهنای باند محدود، تندی سرعت سمبل‌ها است.

رابطه‌ی BW (پهنای باند کانال) با $R_{s_{max}}$

قضیه‌ی نایکوئیست:

نمونه‌برداری ⟵ نرخ نمونه برداری $> 2BW$

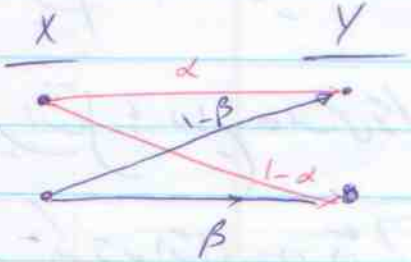
در اینجا برعکس این قضیه را استفاده می‌کنیم. نرخ نمونه‌هایی که با نرخ تندی (سرعت) R_s گیرنده هم قادر است هم‌پهنای باندی ایجاد می‌کند. پهنای باند سیگنال حاصل از آن نمونه‌ها

شرط عبور و دریافت بدون خطا سیگنال در گیرنده

$R_{s_{max}} = 2BW$ ⟵ پهنای باند کانال

$\Rightarrow C = 2BW_{ch} \cdot H_{max}(X;Y)$

مثال: کانال باینری در حالت کلی:



X تغییر کردن $= \begin{cases} 0 \to P \\ 1 \to 1-P \end{cases}$ ، $Y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

حل: $C = rBH_{max}(X;Y)$ رفع: $\begin{cases} \bar{P} = 1-P \\ \bar{\beta} = 1-\beta \\ \bar{\alpha} = 1-\alpha \end{cases}$

$$H(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y): \quad Y = \begin{cases} 0 \to P(Y=0) = P\alpha + (1-P)(1-\beta) = P\alpha + \bar{P}\bar{\beta} \\ 1 \to P(Y=1) = P(1-\alpha) + (1-P)\beta = P\bar{\alpha} + \bar{P}\beta \end{cases}$$

$$H(Y) = -\left[(P\alpha + \bar{P}\bar{\beta})\log(P\alpha + \bar{P}\bar{\beta}) + (P\bar{\alpha} + \bar{P}\beta)\log(P\bar{\alpha} + \bar{P}\beta)\right]$$

$$H(Y|X) = -\sum_X \sum_Y P_{ij}^{tr} \log P_{ij}$$

$$\frac{\partial H(X;Y)}{\partial P} = 0$$ با رفع α, β نتیجه انجام:

$$\Rightarrow P = \frac{1}{1-\alpha-\beta}\left[\frac{1}{1+2^{\frac{H\beta - H\alpha}{\alpha+\beta-1}}} - \beta\right]$$

$H(X;Y)$ جایگذاری $\Rightarrow H_{max}(X;Y) = \log\left(1+2^{\frac{H\alpha - H\beta}{1-\alpha-\beta}}\right) - \frac{(1-\beta)H\alpha - \alpha H\beta}{1-\alpha-\beta}$

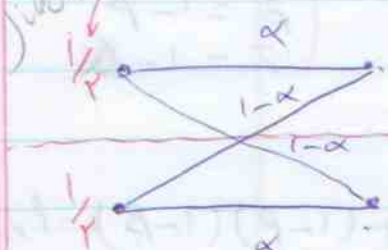
$H\alpha$ ، $H\beta$ آنتروپی منبع باینری با احتمال‌های α و $\bar{\alpha}$ و یا β و $\bar{\beta}$ است:

$$H\alpha = -\left[\alpha\log\alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha)\right]$$

در حالت کلی حل مسئله بسیار دشوار است. اما در حالات خاص حل مسئله وجود دارد (در شکل نمودار زیر)

ماتریس احتمال: در این حالت می‌توان نشان داد که شرط max شدن $H(X;Y)$ آن است که توزیع احتمال ورودی‌ها کانال نیز یکنواخت (یکسان) تغییر کند.

مثال: کانال BSC



حال برای اینکه $H(X;Y)$ ماکزیمم شود.

$P = 1-P = \frac{1}{2}$

حل: می‌دانیم $H(Y)$ مانند قبل است (حالت کلی)

می‌دانیم $H(Y|X)$: کافی است برای یک نقطه ورودی، یک آرگومان از خروجی‌ها و سپس توزیع آن را بنویسیم $H(Y|X)$ محاسبه کنیم.

در دو نقطه ورودی داریم که حل‌های خروجی آن‌ها خروجی‌های خود را می‌بینند.

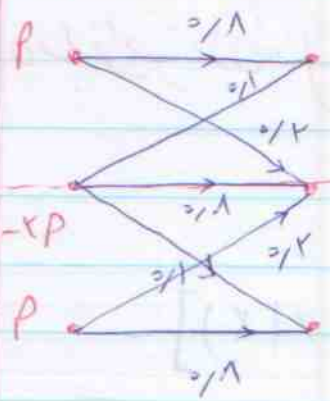
$H(Y)$: حداکثر
$0: P = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}(1-\alpha) = \frac{1}{2}$
$1: P = \frac{\alpha}{2} + \frac{(1-\alpha)}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow H(Y) = -\left[\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right] = 1$

$H(Y|X)$: نقطه ورودی
تعمیم‌پذیر: $H\alpha$
$\frac{1}{2}H\alpha + \frac{1}{2}H\alpha = H\alpha$
جایگزینی
بدترین: $H\alpha$

$H_{max}(X;Y) = 1 - H\alpha$

حد ماکزیمم $H(X;Y)$

مثال:



محدث تقارن

مراحل حل مسأله

$H(Y)$ $\quad$ $H(X;Y)$

$0.8P + 0.1(1-2P)$

$0.8(1-2P) + 0.2P$ $\quad$ $0.1(1-2P) + 0.8P$

$$H(Y) = -\Big[\underbrace{0.8P + 0.1(1-2P)}_{\alpha}\log(\alpha) + \underbrace{0.2P + 0.8(1-2P)}_{\beta}\log(\beta)\Big]$$

$H(X;Y)$

$H = 0.8H$ $\quad$ $H_{0.2} = H_{0.8}$: برای

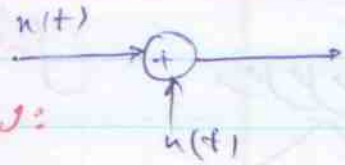
$$-\underbrace{\big[0.1\log 0.1 + 0.8\log 0.8 + 0.1\log 0.1\big]}_{\gamma}$$

$$H(Y|X) = P.H_{0.2} + (1-2P)\gamma + P\,H_{0.2}$$

$$H(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial H(X;Y)}{\partial P} = 0 \longrightarrow P = 0.34$$

ظرفیت کانال دیجیتال:



مدل:

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

$$C = 2B\, H_{max}(X;Y) = 2B\left[H(Y) - H(Y|X)\right]$$

برای تعریف این پیوسته، از آنتروپی تفاضلی برای H استفاده می‌کنیم و روی آن بیشینه می‌گیریم، اطلاعات زیر آنها صدق است.

ولی (با توجه به اینکه) با تقریب خوبی دو آنتروپی دیجیتال و پیوسته را می‌توان نزدیک هم در نظر گرفت، رابطه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot \log f_X(x)\, dx$$

f: توزیع (PDF of f_X) X :

توضیح: مقدار $H(X)$ فقط وابسته به شکل $f_X(x)$ است (می‌توان) نشان داد برای تمام توزیع‌ها (توان) بزرگ، شکل توزیع گوسی، حداکثر آنتروپی را ایجاد می‌نماید.

توزیع گوسی

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\bar{x}}{2\sigma_X}\right)^2}, \quad H(X) = \log\sqrt{2\pi e \sigma_X^2}$$

حداکثری

گوسی

نویز حرارتی جمع شونده، یک توزیع گوسی دارد.

$$N \sim (0, \sigma_N^2)$$

واریانس (توان) توسط ما ↳ میانگین

$Y = X + N$ ⟶ $Y \sim N(0, \sigma_N^2 + \sigma_X^2)$ (نویز، گوسی، نویز گوسی)

$H(Y) = \log \sqrt{2\pi e \sigma_Y^2} = \log \sqrt{2\pi e (\sigma_X^2 + \sigma_N^2)}$

$H(Y|X) = H(N) = \log \sqrt{2\pi e \sigma_N^2}$

$H(Y|X) = H(N) = \log \sqrt{2\pi e \sigma_N^2}$

$H(X;Y) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma_X^2 + \sigma_N^2}{\sigma_N^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{S}{N}\right)$

کانال پیوسته

$C = 2B\, H(X;Y) = B \log\left(1 + \frac{S}{N}\right)$ این مقدار حاصل از کدگذاری بهینه عمل غیر قابل حصول است.

مثال: منبع ⟶ ۱٫۷ ، ۱٫۵ ، ۰٫۲ ، ۰٫۳ (دنباله‌هایی که تولید می‌شود) ⟶ برای همه یکسان است

کدگذاری تصادفی: Random Coding

$n(t)$ ⟶ فرآیند تصادفی

$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n^2(t)\, dt = \sigma_X^2$

$t = t_0$

$n_1(t_0)$, $n_2(t_0)$, $n_3(t_0)$

فرآیند تصادفی مثل آنکه همه سیگنال‌ها را مد نظر داریم

$X(t_0)$ ⟶ متغیر تصادفی ⟶ تابع چگالی احتمال

فرآیند تصادفی ⟶ آمارهای t های دیگر

نکته: مقدار S در رابطه فوق برای گیرنده می باشد.

نکته: اگر فقط کانال باندی به عرض $B=\infty$ در اختیار باشیم، ظرفیت کانال نمی‌تواند بی‌نهایت شود زیرا به اندازه نویز نیز انرژی وارد کانال می‌شود.

مثال: برای کانال تلفن با پهنای باند $3KHz$ و چنانچه SNR ($\frac{S}{N}$) دریافتی $35dB$ باشد، ظرفیت کانال انتقال چقدر است؟

$$C = 3\times10^{3}\log_2(1+1000)$$

$$\Rightarrow C = 30\ \frac{Kbit}{Sec}$$

برای انتقال فقط از روی کانال تلفن فوق:

$$2\left[\frac{\text{کلمه}}{\text{ثانیه}}\right]\times 4\left[\frac{\text{حرف}}{\text{کلمه}}\right]\times 1\left[\frac{bit}{\text{حرف}}\right] = 10\ \frac{bit}{sec}$$

اطلاعات تولید شده Source

آنتروپی حروف

چنانچه قادر به کدینگ شرایط بهینه برویم، پهنای باند $1Hz$ برای فوق کانال تلفن کفایت می‌کند.

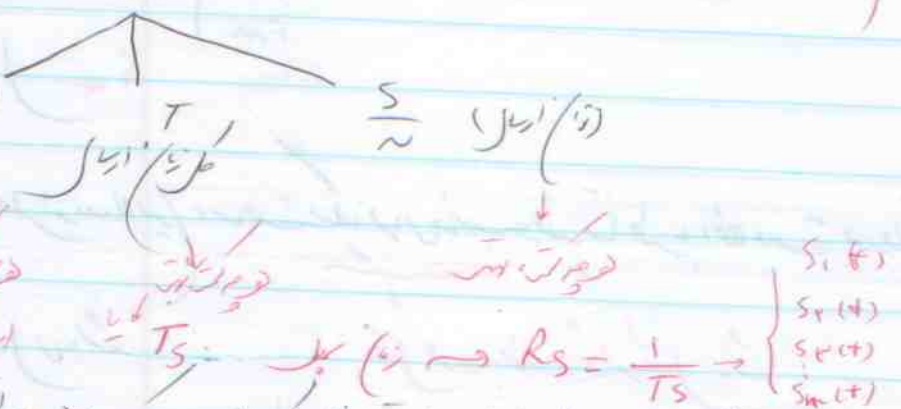
$$N = \eta B \rightarrow C = B\log\left(1+\frac{S}{\eta B}\right)$$

$$C = \frac{\log_2\left(1+\frac{S}{\eta B}\right)}{\frac{1}{B}} = \frac{0}{0}$$

هوپیتال نسبت به $\frac{1}{B}$

$$\Rightarrow C = \frac{S}{\eta}\cdot\frac{1}{1+S/\eta B}\ln 2 = \frac{S}{\eta}\ln 2$$

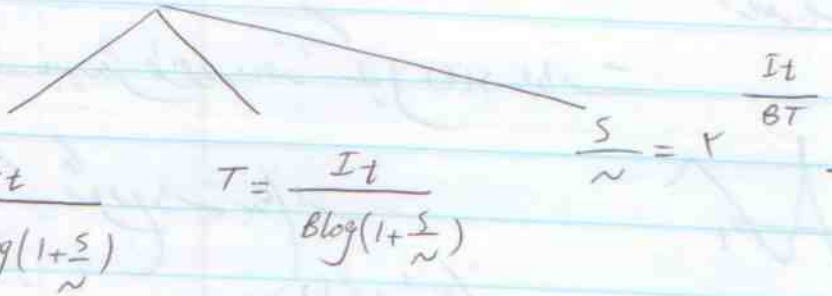
سه پارامتر مهم برای ارسال اطلاعات و trade-off بین آن‌ها:



که در عمل این سه با هم trade-off دارند. سه نوع کاربرد بسته به اینکه پهنای باند یا توان برایش اهمیت بیشتری دارد یا زمان را مدنظر قرار دهیم.

اگر حجم کل اطلاعات ارسالی I_t باشد، با کانالی به ظرفیت C، زمان مورد نیاز برای ارسال چقدر باید باشد:

$$I_t = C \cdot T \rightarrow I_t = BT\log\left(1+\frac{S}{N}\right)$$



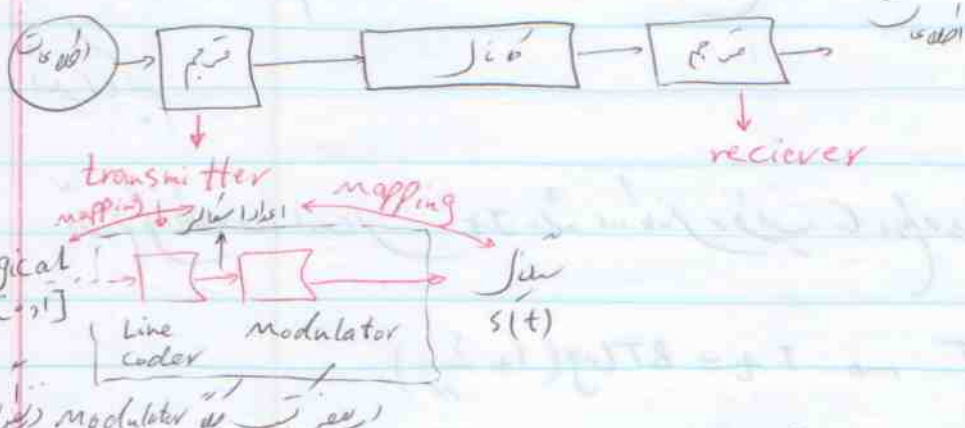
مدولاسیون:

آنالوگ ← AM, PM, FM

دیجیتال ←

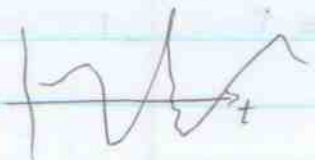
هدف اصلی از مدولاسیون، ساخت سیگنال‌های مناسب و وفق‌یافته با اطلاعات جهت انتقال بهتر آن از طریق کانال می‌باشد.

قابل عبور به طور کارآمدتر از کانال باشد



در مدولاتور باید روش طراحی و ساخت سیگنال $s(t)$ را دانست.

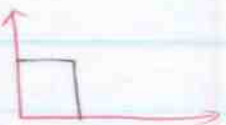
سیگنال: یک شکل موج وابسته به زمان است.



نحوه تعریف سیگنال

ارائه در حوزه زمان

Wavelet



اطلاعات را به طور سلسله‌ای یک یا صفر می‌کند.

یعنی کانال یک کلک است.

از آنجا شکل موج از لحاظ هندسی توانند وضعیت مختلف انجام شود.

یک بعدی

دو بعدی

سه بعدی

از آنجا سیگنال نیز در فضاهای سیگنالی با بعدهای مختلف

(حالت) نیز می‌باشد.

سیگنال‌های یک متغیر از یک‌دیگر بوده و به بعضی عنوان

حاصل حصول یا حاصل تصویر روی یک‌دیگر هستند، شبیه به محورهای مختصات محور ارتفاع، می‌توانند تعریف شوند

سازنده‌ی بعد برای سیگنال شوند:

مثال: $f_1(t) = \sin w_0 t \quad , \quad f_2(t) = \cos w_0 t$

تعریف تعامد بین دو سیگنال به نام ضرب داخلی

$$f_1(t) \perp f_2(t)$$

سیگنال است:

$$\langle f(t) \cdot g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g^*(t)\, dt$$

تعریف فوق منطبق با تعاریف ضرب داخلی برای بردارهای هندسی است

۱) مانند ضرب داخلی، نتیجه scaler و مستقل از زمان است.

۲) نتیجه حاصلضرب، تصویر یک سیگنال روی سیگنال دیگر است. (که مفهوم تصویر، همان Correlation یا شباهت بین دو سیگنال و ارتباط بین آنهاست) از نظر اطلاعات مشترک

$f(t) \perp g(t) \longrightarrow$ متعامد orthogonal. g, f

③ دو مفهوم طول برای بردار، انرژی برای سیگنال است.

$$\begin{cases} \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 \\ \langle f(t), f(t) \rangle = \int |f(t)|^2 dt = E_f \end{cases}$$

$$E_f = \left| |f(t)| \right|^2 = norm(f(t))^2$$

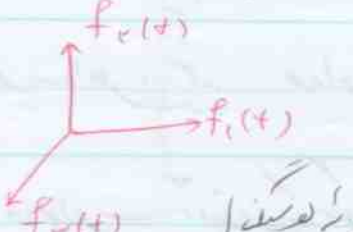
* سیگنال‌هایی با $norm = 1$ (انرژی برابر واحد)، اصطلاحاً نرمالیزه یا نرمال نامیده می‌شوند.

④ * تعریف قبل برای سیگنال انرژی بود، برای سیگنال توان غیر متناوب به صورت تعریف می‌شود:

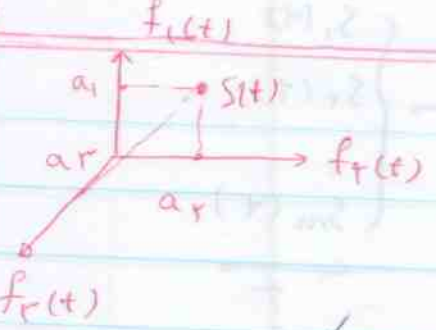
$$\langle f(t), g(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot g^*(t) dt$$

⑤ به مجموعه چند سیگنال مثل $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)\}$ که دو به دو بر هم عمود باشند، یک پایه Base برای ایجاد فضای سیگنال (Signal space) می‌گویند متعامد (متعامد) orthogonal گفته می‌شود.

اگر علاوه بر متعامد بودن، $norm(f_i(t))$ نیز ۱ باشد، به مجموعه فوق مجموعهٔ orthonormal گفته می‌شود.



⑥ با تشکیل دستگاه مختصات یا فضای سیگنال، امکان ارائه هر سیگنال به صورت یک بردار در فضا وجود دارد.



$$S(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + a_3 f_3(t)$$

$$\langle S_2(t), f_1(t) \rangle \quad \langle S(t), f_2(t) \rangle \quad \langle S(t), f_3(t) \rangle$$

آنگاه $S(t)$ به صورتی که از پایه‌ها ($f_i(t)$) اطلاعات تشکیل نداشته باشد (عمود بر هم) تعریف می‌شود.

طراحی سیگنال شامل دو مرحله است:

انتخاب مشخصات یا فضای سیگنال

↓

ارائه‌ی سیگنال برای پایه $f_i(t)$

↓

وظیفه انجام Modulator است.

$f_1 = \sin \omega_0 t$ $\quad f_2(t) = \delta(t)$

$f_3 = \cos \omega_0 t$

انتخاب بهترین سیگنال برای حضور در آن فضا

↓

ارائه مشخصات عددی

↓

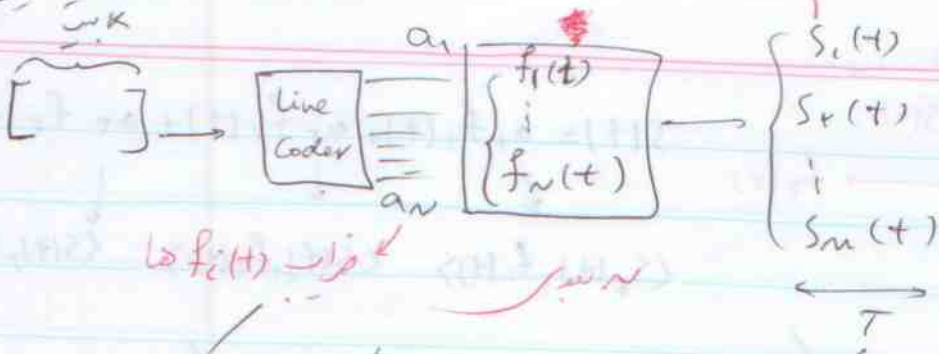
وظیفه Line coder است.

a_1 a_2 a_3

$$S(t) = \sum_{i=1}^{3} a_i f_i(t)$$

با ترکیب a_i ها سیگنال عوض می‌شود.

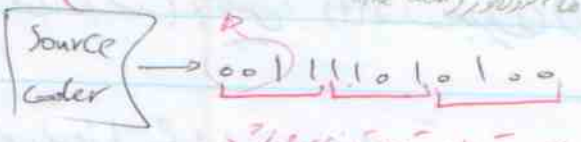
$M = 2^K$ تعداد توصیف‌های سیگنال از طریق یک خط ($f_i(t)$ ها) در فاصله T



$f_i(t)$ ها ← ضرایب

T : زمانی لازم برای اینکه گیرنده یک سمبل ارسالی را به طور کامل دریافت کند.

توجه کنید که آفیس وقتی کدینگ (در اینجا) 0 و 1 ها را بعد از Line Coder و قبل از Source.c و ch.c انجام شده است.



K بیت K بیت دسته بندی می‌شود.

از هر K بیت که دیدیم یک سمبل ارسالی تولید می‌شود.

$M = 2^K$ حالت‌های مختلف احتمالی ورودی‌های کانال

و در نتیجه یک سمبل $S_i(t)$ در فاصله T تولید می‌شود.

$K = 2$
- 00 → $S_1(t)$
- 01 → $S_2(t)$
- 10 → $S_3(t)$
- 11 → $S_4(t)$

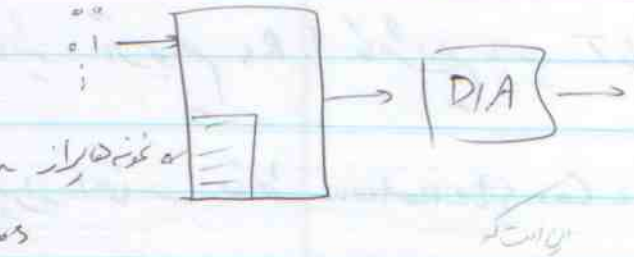
ایجاد یک خط N تایی و ساعت → K بیت ورودی → اصطلاحی عدد به K بیت → Lookup table یک Line Coder → سمبل $S_i(t)$

Lookup table

K بیت ورودی	a_1	a_2	...	a_N
00	0.5	0.35	...	...
01	0.65	0.25	...	...
10	1	1	...	...
11	1	1	...	...

Direct

(Digital Syntesis) DDS ← IC ها : حالت



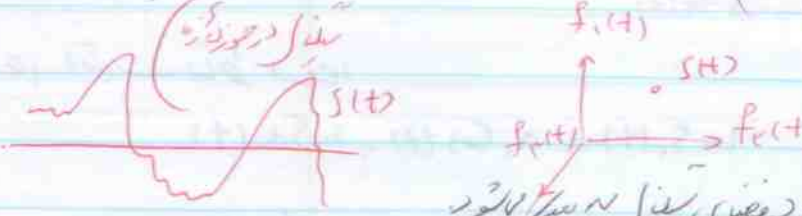
این است که

حسن بزرگ تجزیه توابع برای پایه‌های سازنده‌ها متعامد آنها، امکان عبور از فضای سیگنال به فضای بردارها را (هندسی) می‌دهد.

$$S(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t)$$

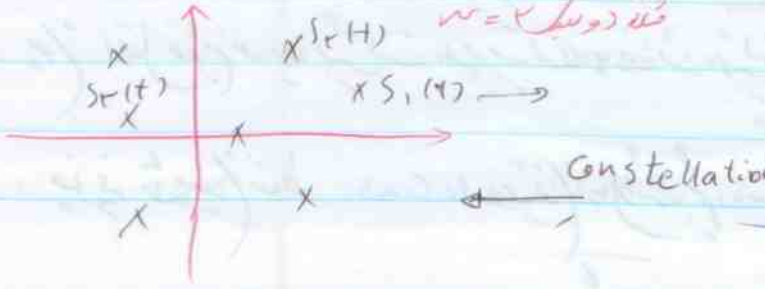
$$S(t) \equiv \langle a_1, \dots, a_n \rangle$$ نمایش روشن‌های آنالیز برداری قابل استفاده برای

آنالیز سیگنالی می‌باشد همچنین می‌توان برای بردار، بحث هندسی (فضای) در نظر گرفت



بردار در حوزه زمان تبدیل به یک نقطه در فضای سیگنال N بعدی می‌شود

مجموعه کل سیگنال‌های قابل ساخت توسط مدولاتور مختلف با یک مجموعه از نقاط در بعد هندسی می‌شود



$M = 2^K$ نقطه داریم

برای مجموعه، صورت فلکی یا

مدولاسیون گفته می‌شود.

هرچه فاصله نقاط از هم بیشتر باشد، احتمال خطا کمتر شود ولی پهنای باند بیشتر نیاز است.

حاشیه: اگر بخواهیم R_s را ثابت در نظر بگیریم باید T را افزایش دهیم در نتیجه

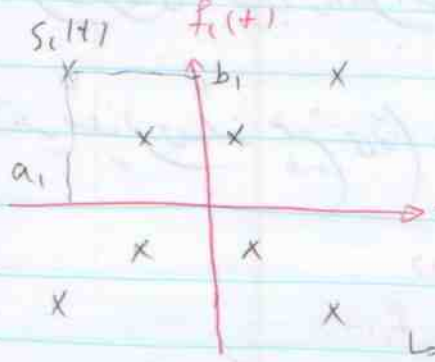
پس از انتخاب نقاط Constelation، محاسبات دو نقطه را به نقطه دیگر انتقال دهد.

نوع Line Coder نام دارد.

مثال:

$$K = 3 \rightarrow M = 2^3 = 8 \rightarrow \text{سیگنال} \rightarrow \begin{matrix} S_1(t) \\ \vdots \\ S_8(t) \end{matrix}$$

روش ساخت $S_i(t)$ ها:

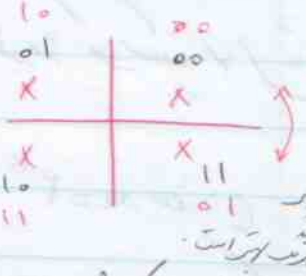


1) انتخاب فضا به طوری که $N = 2$ شود

2) انتخاب نقاط در فضا

$$S_i(t) = a_i \cos(t) + b_i \sin(t)$$

3) اختصاص یا نگاشت کدهای ورودی به نقاط در نظر گرفته شده.

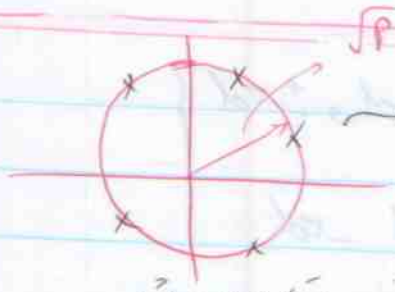


4) تولید سیگنال‌های متناظر با استفاده از ترکیب خطی پایه‌های متعامد

توجه: چون احتمال خطا بین همسایه‌ها کمتر است، هرچه بیت‌های کنار هم خطا شوند، بهتر است پس کد گری بهتر است.

نکته: چنانچه بخواهیم تعداد نقاط Cons محدود نباتی از مبدأ داشته باشیم، باید نقاط در داخل دایره‌ای به شعاع $\sqrt{P}$ قرار گیرند.

P



→ PSK توزیع

با انتخاب شکل شعاع‌ها و نقاط مدولاسیون‌های مختلف ایجاد می‌شود.

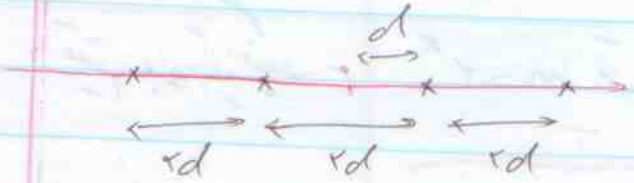
مدولاسیون : Modulation

الف) Base Band (بیس باند) →
- PAM Pulse Amplitude Modulation
- PPM
- POM و PWM

ب) Band Pass (باند پاس) →
- ASK → Amplitude-shift keying → QAM
- PSK : Phase-shift keying
- FSK : Frequency-shift keying

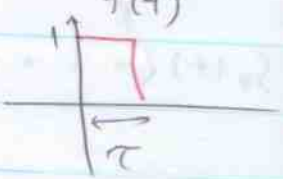
۱) PAM : انتخاب یک شکل پالس ثابت

$N=1 \longrightarrow f(t)$



حالت N=2

$(\pm a_m d)$ دامنه‌ها $\{ \pm d, \pm 2d, \pm 3d, \dots \}$



مثلاً $f(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \tau/2}{\tau}\right)$

$S_m(t) = a_m f(t)$

مثال: $K=2 \rightarrow n=4 \rightarrow A_m \in \{\pm d, \pm 3d\}$

$00 \rightarrow +3d \quad (S_1(t))$

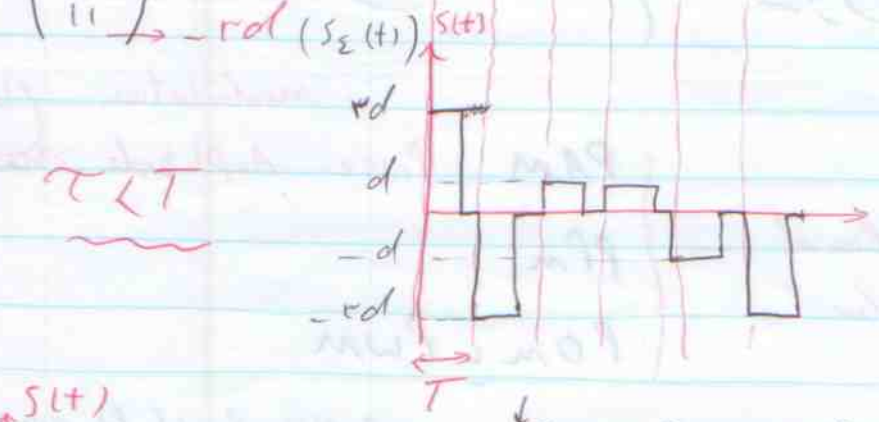
$01 \rightarrow +d \quad (S_2(t))$

$10 \rightarrow -d \quad (S_3(t))$

$11 \rightarrow -3d \quad (S_4(t))$

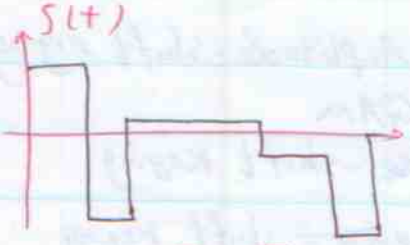
$+3d \; -3d \; +d \; +d \; -d \; -3d$

$00 \; 01 \; 10 \; 10 \; 11 \; 11$



$\tau < T$

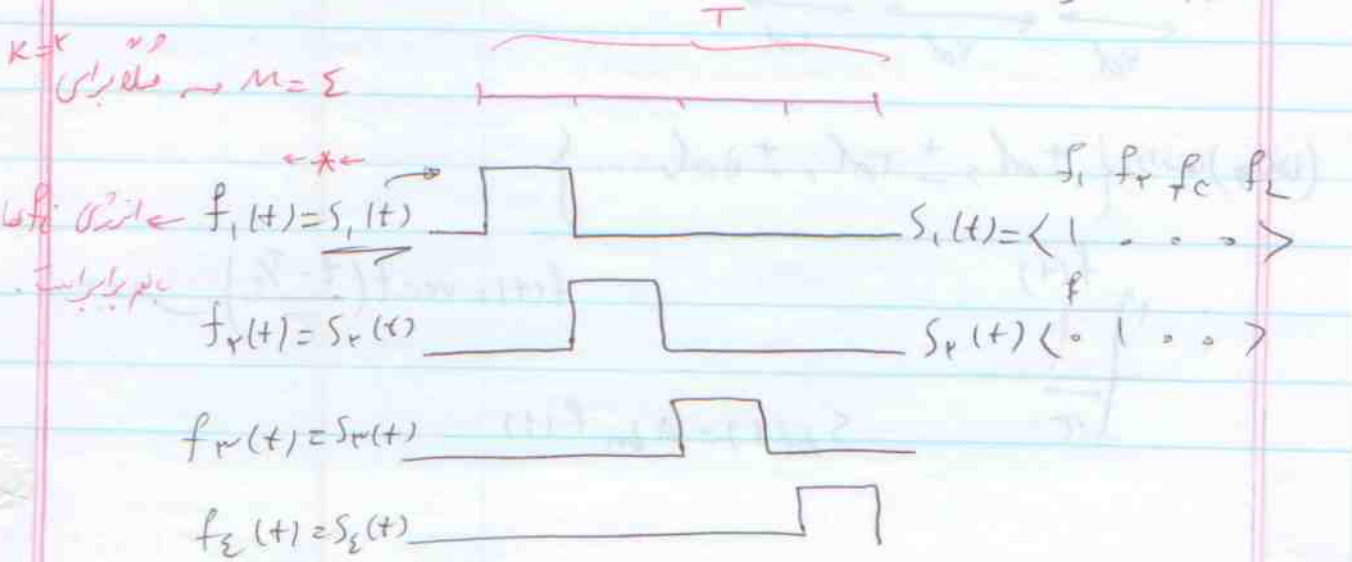
$S(t) = S_1(t) + S_4(t-T) + S_2(t-2T) + S_3(t-3T) + S_4(t-4T)$



$\tau = T$

2) PPM: بازه‌ی زمانی سلانیت: T

تقسیم بازه‌ی سلانیت به $M = 2^K$ تعداد حالت و اختصاص یک موقعیت به هر حالت.



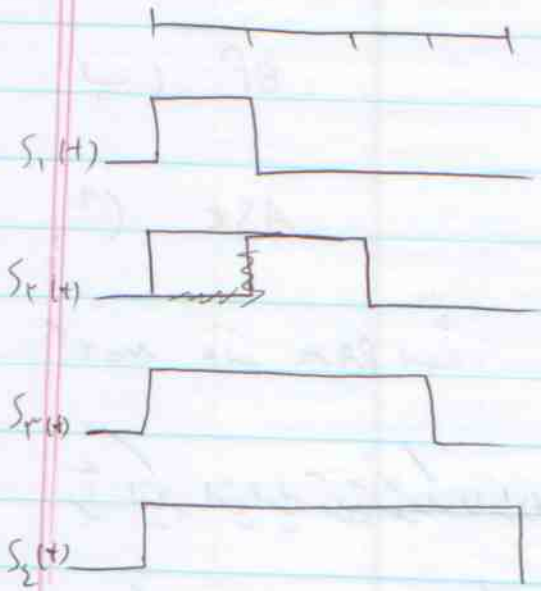
انرژی f_1 با هر کدام از f_2 تا f_4 برابر است.

* $S_1(t) \perp S_2(t) \perp S_3(t) \perp S_4(t) \rightsquigarrow N=4$

3) PBM: برای $k=2$ و $N=4$:

$N=4$ است. در $S_1(t)$ که متناظر نشانه‌ی $f_1(t)$ و $f_4(t)$ ارسال می‌شود

PPM نیز به همین شکل است.



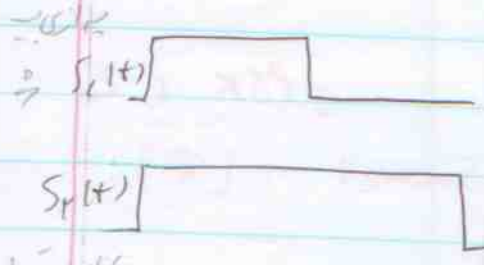
$S_1(t) = f_1(t)$ ⟨1000⟩

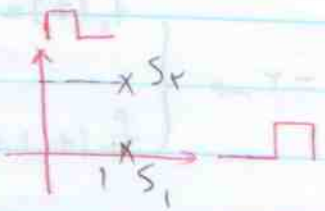
$S_2(t) = f_1(t) + f_2(t)$ ⟨1100⟩

$S_3(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ ⟨1110⟩

$S_4(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t)$ ⟨1111⟩

برای $k=1$ و $N=2$:





مقایسه PPM و PDM:

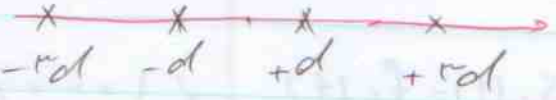
- توان ارسالی در PDM بیشتر است.
- پهنای باند در PDM کمتر است.

ب) BP:

۱) ASK

$N=1 \rightarrow f(t)=\cos w_c t$

$M=2^k$ مانند PAM است.



برای اینکه این ایراد برطرف شود دامنه $S_1(t)$ را دو برابر $S_2(t)$ می‌کنیم (یعنی توان را چهار برابر می‌کنیم)

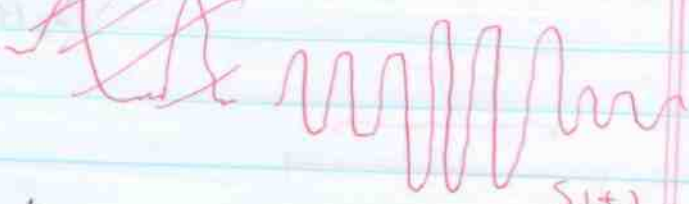
$S_1(t)=d\cos w_c t$

$S_2(t)=-d\cos w_c t$

$S_3(t)=3d\cos w_c t$

$S_4(t)=-3d\cos w_c t$

محور انتخاب کنید.

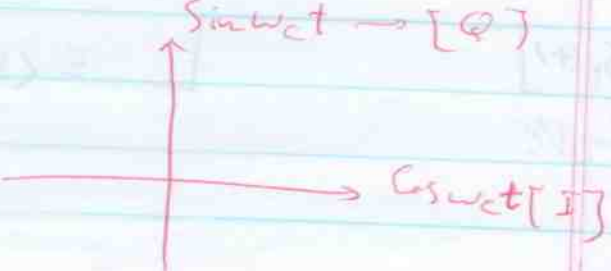


۲) PSK:

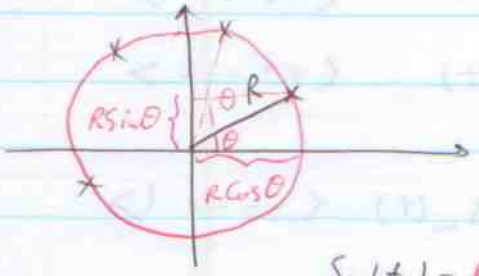
$N=2 \rightarrow \begin{cases} f_1(t)=\sin w_c t \\ f_2(t)=\cos w_c(t) \end{cases}$

$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$

دلیل آن این است که $\cos\theta$ در راستای I است.



چیدمان نقاط (2^k نقطه) در این فضا بر اساس مواردی انجام می‌شود که برای بهبود پارامترهای دیجیتال (دامنه و فاز) باید روی دایره چیده شوند.



$$\theta = \frac{2n}{2^k}$$

$$S_i(t) = R\cos\theta \cos\omega_c t + R\sin\theta \sin\omega_c t$$

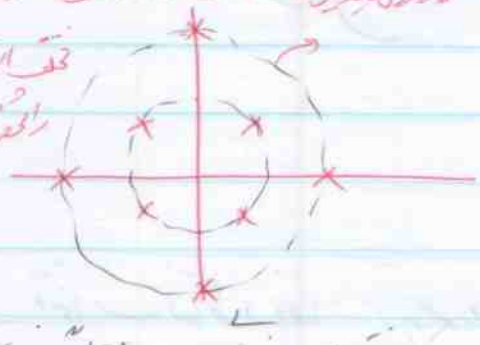
QPSK ← تعداد نقطه: ۴

Quad

در حالت خاص $k=2 \leftarrow M=4$:

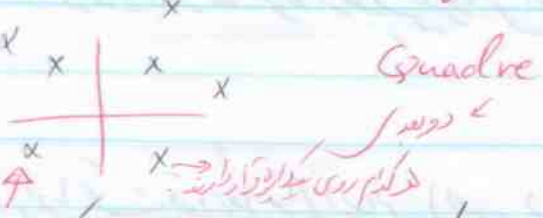
نقطه‌ها بر دایره قرار گرفته‌اند PSK

نقطه‌ها در فواصل مختلف قرار گرفته‌اند ASK



تفاوت QAM با PSK و ASK :

QAM



Quadre ← دو بعدی

در هر کدام روی سیگنال‌ها قرار دارند

نکته: در حالت خاص می‌توان QAM را به صورتی (هر چند نه بهینه) طراحی کرد که بیش از ۲ بعدی نظر گرفت.

(3) FSK : در این حالت سیگنال فضا بیش از ۲ بعدی نمی‌تواند باشد.

برای M-FSK نیاز به M سیگنال با فرکانس‌های متفاوت داریم.

$$K = \log_2 M$$

یادآوری: عوامل تنظیم‌کننده سیگنال ← فاز / دامنه

$N = M$

بنابراین $S_i(t)$ ها را هم عمود تشکیل می‌دهیم:

مثال:
$$\begin{cases} f_1(t) = \cos w_c t = S_1(t) & \langle 1\,0\,\dots\rangle \\ f_2(t) = \cos 2w_c t = S_2(t) & \langle 0\,1\,\dots\rangle \\ \vdots \\ f_n(t) = \cos n w_c t = S_n(t) & \langle \dots\,1\rangle \end{cases}$$

حوزه‌ی سیگنال دیجیتال:

۱- انتخاب فضای سیگنال (بعد فضا) — $N=1$: مانند PAM (Base Band) با تغییر دامنه

$N=2$ ← با فاز تفاوت دارند وجود می‌آیند $\sin w_c t$, $\cos w_c t$

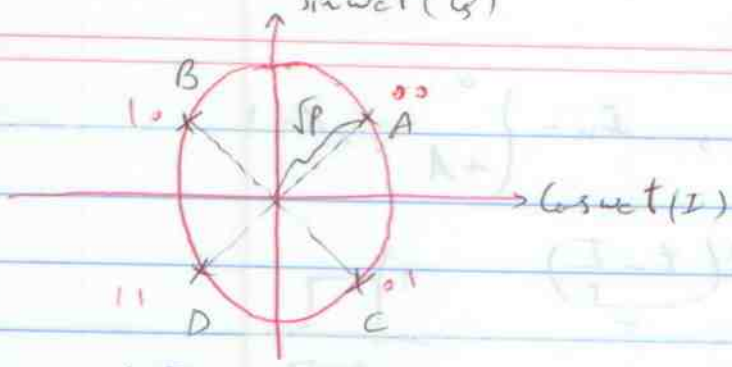
Nهای بالاتر ← عموماً از ترکیب این دو فاز تفاوت وجود می‌آیند

۲- انتخاب نقاط در فضا: به صورت آرایه‌ای قیود مثل توان ارسالی اعمال در دایره به شعاع $\sqrt{P}$ برای داشتن حداکثر توان P

۳- یافتن مختصات نقاط Constellation

ذخیره در LUT و توسط Line Coder
look up table

اختصاص یا mapping نقاط ← کدهای k تایی ورودی



مثال:

$$A = \left(\sqrt{P}\cos\frac{\pi}{4}, \sqrt{P}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$B =$

$C =$

$D =$

صفحه ۲۱

حداکثر توان: P

$N = 2$

$k = 2 \Rightarrow M = 2^2 = 4$

سوال: مزایای انتخاب line coder در مقابل سایر انواع line coder ها چیست؟

جواب: line coding برای تبدیل $f_i(t)$ ها به سطوح مختلف ولتاژ است.

توجه: در بعضی کتب، این بحث با عنوان سیگنالینگ باند پایه بیان شده است.

بلوک اصلی L.C، MOD نامیده می‌شود.

سه دسته کلی:

- Uni Polar: اعداد تک علامت
- Polar: اعداد دو علامت متقارن
- Bipolar: اعداد دو علامت غیر متقارن

Uni Polar:

قاعده کدینگ: بیت ورودی صفر: ارسال عدد ۰

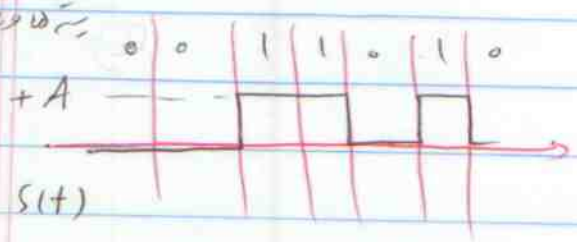
بیت ورودی یک: ارسال عدد $+A$ یا $-A$

مثلاً اگر سطوح ولتاژ ما دارای $N = 4$ (مانند PAM) و پالس پایه $g(t)$ باشد، داریم:

$$s(t) = I_n \cdot g(t) \quad , \quad I_n = \begin{cases} 0 \\ +A \end{cases} \quad , K=1$$

مثال: $g(t) = rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$

ورودی ها: 0 0 1 1 0 1 0



پهنای باند $\propto$ تعداد لبه‌ها

دامنه A ↑ (توان ↑)

فرکانس از نوسان ↑

نکات:

1. پهنای باند مناسب با تغییر یا تغییرهای لبه‌های ایجاد شده در شکل پالس می‌باشد.
2. روشی که در آن سیگنال بیت صفر، ولتاژ DC ایجاد نکند، اگرچه از نظر انرژی مزیت محسوب می‌شود اما در عمل مدارات آن دشوار است، مثلاً روش bipolar دارای ولتاژ DC است و $f_1 \neq 0$ دارد (به دلیل کوپلاژ).

چون این ولتاژ DC ثابت نیست و با زمان تغییر می‌کند، نمی‌توان دریافت این نوع DC را از سیگنال حذف کرد تا به سیگنال اصلی رسید.

3. شرایط پیاده‌سازی Clock Recovery از سیگنال ارسالی، بهتر است فراهم باشد. در این حالت گیرنده نیازی به Pilot های جدا و صرفاً با سیگنال ارسالی انجام پذیر است.

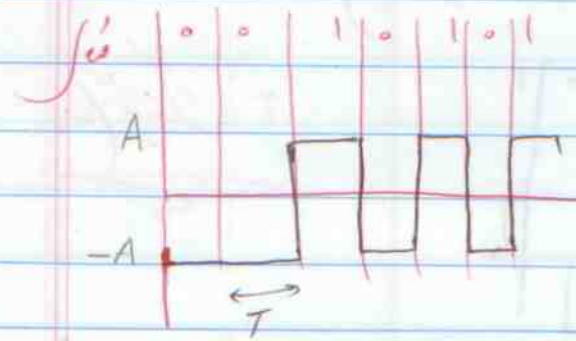
همه‌ی موجود در شکل، عامل رادیکی تبدیل برای فرض شده می‌باشد. که البته ایجاد trade-off

با توجه به بندی می‌باشد

۲- روش Polar:
- الف) NRZ (NRZ-L, NRZI, RZ)
- ب) RZ
- ج) Biphase (دو فازه) (منچستر، دیفرانسیل)

الف)

الف)۱- NRZ-L: (level)
- قاعده کدینگ:
  - بیت صفر: $-A$
  - بیت یک: $+A$

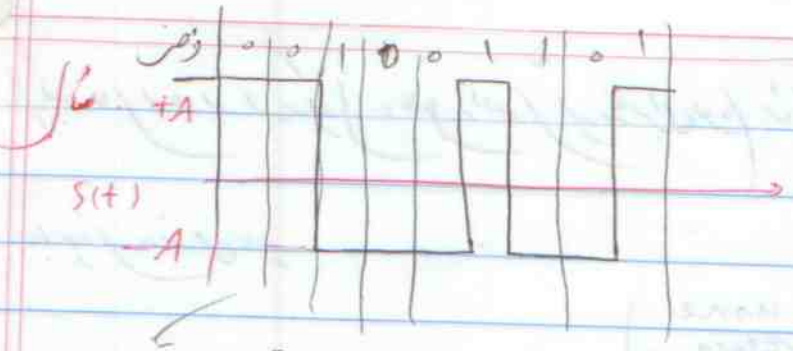


- شرط تقارن کلمات حول صفر، متناظر DC است
- همزمانی باند CR فاقد کلمات توالی بیت و نویزپذیری

Clock Recovery

الف)۲- NRZ-I:
- بیت صفر: تکرار عدد قبل بود) تغییر
- بیت یک: تغییر عدد قبل (در علامت)

توجه: باید یک حافظه داشته باشیم.



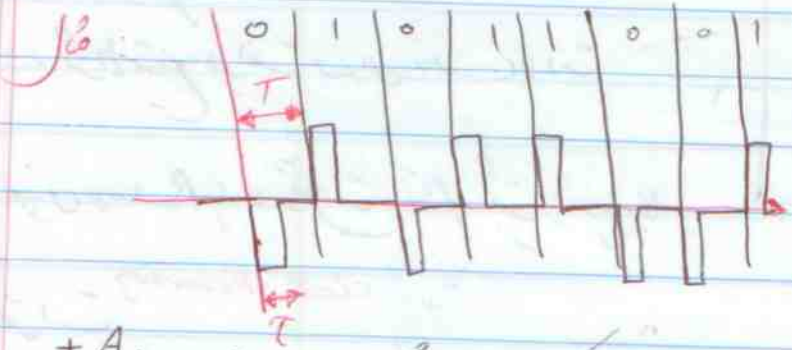
در تبدیل این روش: بودن همانند است با سیم بندی دوسیم ارسال است. دو حالتی در NRZ-L صدق به کار است که آن سیم ها جای شود، Not می شوند.

الف) NRZ-S: شبیه ولی دقیقاً برعکس NRZ-I است.

ب) RZ: بازگشت به صفر داریم:

تا مدت کد تیک: بیت صفر: پالس A- به طول T

یک: پالس A+ به طول T



زمان بیت: T

این روش کدگذاری با پالس هایی به عرض T و دامنه A+ و A- عمل می کند. (line coding)

ویژگی ها:

۱- پهنای توان توسط ارسالی

۲) به دلیل وجود RC (مقاومت) پذیرفته است ولی پهنای باند بیشتر است.

ظرفیت خازن: کندانسور یا خازن توانایی ذخیره بار الکتریکی را دارد و به صورت دو صفحه موازی که توسط دی الکتریک از هم جدا شده اند ساخته می شود.

$I_{max} = \frac{\pi}{4} A$: دامنه موج سینوسی

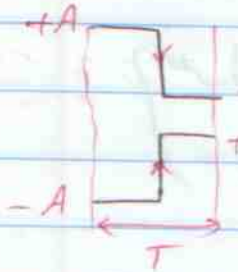
$I_{rms} \simeq 0.707 I_{max}$ توان

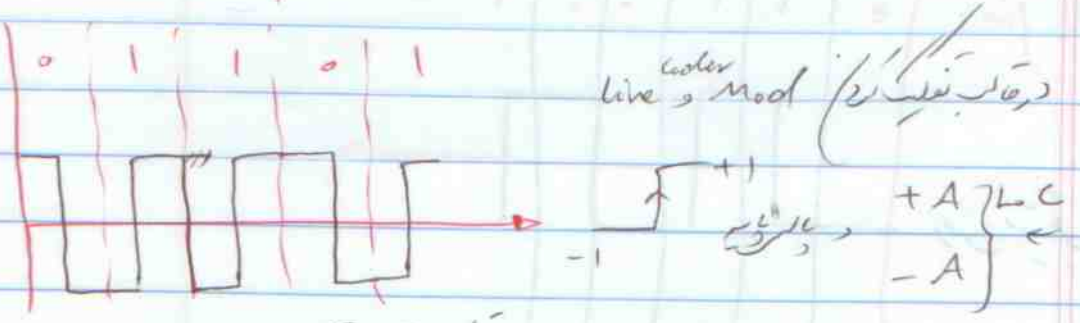
$\frac{\tau}{T} \leq 1\%$ به صورت تقریبی

ج) Biphase : در حالت دوفازه، در هر بازه T یک علامت نداریم.

ج۱- تجزیه: بیت صفر: پله پایین رونده

بیت یک: پله بالا رونده

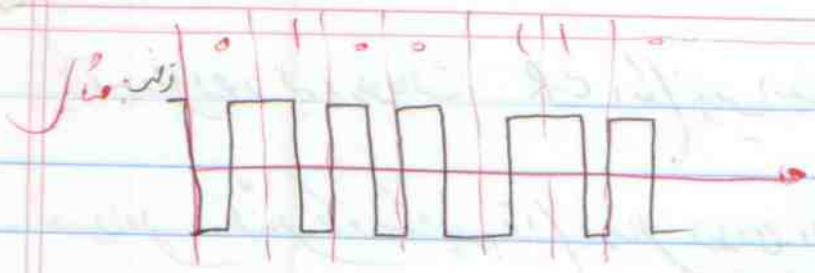




در حالت تفکیک کد Mod و Color

ج۲- تجزیه تفاضلی: صفر: ابتدای پله تفاوت با قبلی است

یک: پله تفاوت با قبلی است



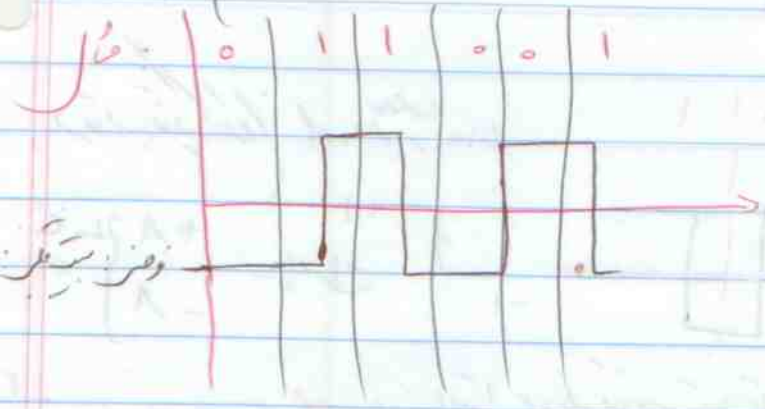
عدم حساسیت به نویز و تغییر پارامترها

دارای اشکال C.R وجود دارد نهایی باشد (ایزوله) دارد.

فاقد مؤلفه DC می‌باشد.

این روش در HDD یا فلاپی درایو استفاده می‌شود. مدار PLL وظیفه کنترل کردن سنکرون با سیگنال را دارد. این مدار ثابت زمانی دارد.

ج) روش میلر:
- بیت ۱: ادامه وضعیت قبل تا وسط و سپس عوض می‌شود.
- بیت ۰: قبلی ۱: وضعیت قبل بلافاصله تغییر می‌کند
  - ۰ ۰ ۰ ۰ در ابتدا تغییر و سپس بعد تغییر نمی‌کند



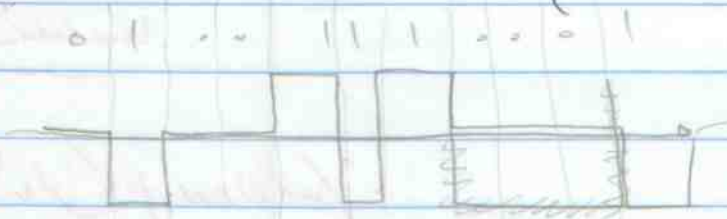
خانواده‌ی Bipolar ← AMI, B8ZS, HDB3

alternative mark inversion

قاعده‌ی AMI:
- بیت ۰: تبدیل نمی‌شود
- بیت ۱: قرینه آخرین سیگنال غیر صفر

space: فضا (سیگنال صفر)
mark: علامت (سیگنال غیر صفر)

مثال:



توان ارسالی ← فاقد مؤلفه‌ی DC

آسان تصحیح خطا (عدم امکان CoR)

برای رشته‌های ۰ طولانی مشکل دارد. برای حل مشکل از B8ZS یا HDB3 استفاده می‌شود.

اگر ۵ صفر پشت سر هم بیاید، فرستنده و گیرنده همگام نمی‌شوند. برای اینکه به ایجاد کنم، از رشته‌های جایگزین استفاده می‌کنم.

B8ZS: جایگزینی بلوک‌های تمام صفر ۸ بیتی مثل AMI با تعدادی جایگزینی

Binary 8 zero Sub stitution

با قاعده زیر:

قاعده‌ی جایگزینی:
- آخرین سیگنال مثبت: ۰ ۰ ۰ + − ۰ − +
- آخرین سیگنال منفی: ۰ ۰ ۰ − + ۰ + −

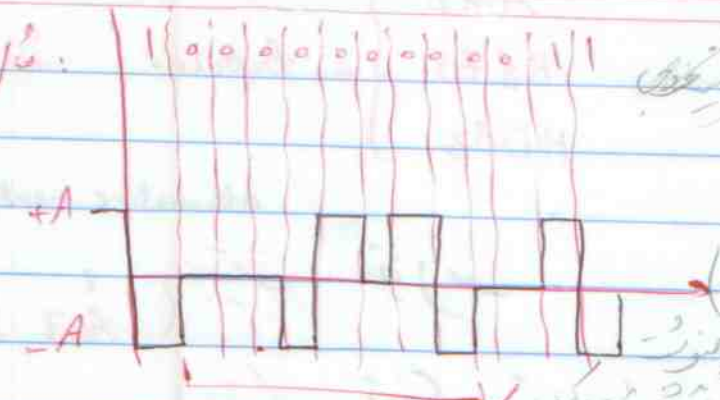
چون تعداد ۱ها زوج است، فرستنده متوجه می‌شود که ۸ صفر داشته و این‌ها جایگزینی هستند.

گیرنده: تشخیص

Violation: نقض

HDB3: با ۴ صفر متوالی جایگزین می‌شود

آخرین سیگنال غیر صفر	تعداد ۱ها بعد از آخرین جایگزینی: فرد	زوج
−	۰ ۰ ۰ −	+ ۰ ۰ +
+	۰ ۰ ۰ +	− ۰ ۰ −



سوال: تعریف کد خط کدگذاری که بتواند خودش را بازسازی کند؟ چه نوع کد باید باشد؟

کد خط: وقتی کد خط (Line code) را روی سیگنال اعمال می‌کنیم، سیگنال خروجی را Line coded می‌گوییم.

آنالیز کامل مدولاسیون:

برای ارائه کامل و دقیق یک مدولاسیون نیاز به موارد زیر است:

۱- نحوه ارائه و فرم سیگنال‌های استفاده شده

- N: تعداد سیگنال‌های انتخاب شده
- k: طول بلوک‌های ورودی
- T: عرض سیگنال‌ها
- $f_i(t)$: یک سیگنال پایه
- * سیگنال‌های انتخاب شده $N = 2^k$ (به صورت ارائه خط و یا ارائه صورت تابع)
- * نحوه نگاشت کدهای ورودی به سیگنال‌های ورودی

۲- یا به چگونگی طی شدن توان یا ... برای مدولاسیون ← توزیع توان (دانستن توان و انرژی)

جمعه

نتایج بند ۲ ← الف) محاسبهٔ BW ناحیهٔ تونلی که حداقل ۹۸٪ انرژی زیر منحنی PSD را شامل شود

ب) محاسبهٔ توان کل سیگنال (در حوزهٔ فرکانس) = انتگرال یا سطح زیر منحنی PSD

۳ـ محاسبهٔ توان باند پایه (در حوزهٔ زمان / باند پایه)

۴ـ محاسبهٔ کارایی (کیفیت عملکرد) ← Pe (احتمال خطای متوسط مدولاسیون)

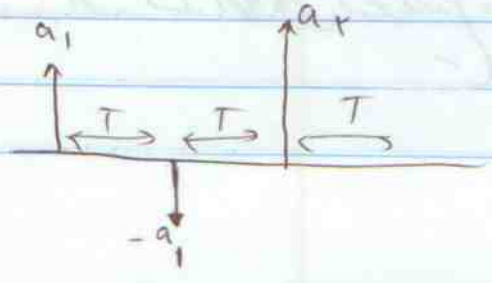
نکات کلی:

۱ـ انجام محاسبات و آنالیزها در حوزهٔ Constellation و به صورت برداری نیز به جا فرم کلاسیک حوزهٔ زمان، وجود دارد.

۲ـ برای محاسبهٔ PSD با توجه به آنالوگ PSD و دقت به شکل سیگنال های انتخاب شده آن با نگاهی به نکات انتخاب اعداد ویژه، سعی بر نکات تحلیل نیز لازم خواهد بود.

برای انتخاب از تعداد در محاسبات به شکل جمع برای محاسبهٔ PSD انتخاب می شود که به سادگی قابل تقسیم به دو شکل زوج و فرد گیری باشد.

این مقالب در جمع شکل PAM نیز برای ما باشد.



$v_1 - v_2 + v_3 + 2in = 0 \rightarrow v_1 = v_2 - v_3 - 2in$

$-2in - v_3 + v_4 = 0$

تکرار

$$\begin{cases} v_1' + 2v_1 = 5 \\ 5v_1 + 2v_1 = 5v_1/s \\ v_1 + v_1' = 7 \end{cases}$$

$$\frac{v_1}{s} + v_1' = \frac{7}{s}$$

LTI

$x(t) \longrightarrow h(t) \longrightarrow h(t) * x(t)$

ب) تعیین پاسخ ضربه $\delta(t)$ به هر گونه که $g(t)$ وجود دارد، کافی است ضربه $\delta(t)$

از سیستم با $h(t) = g(t)$ عبور کند.

قدم PSD برای سیگنال در عبور از

$$S_y = S_x \cdot |H(j\omega)|^2$$

PSD سیگنال قبل از عبور

PSD سیگنال بعد از عبور

$$s(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_m f_m(t)$$

$$\text{PSD } S_o = S_1 |F_1(j\omega)|^2 + S_2 |F_2(j\omega)|^2 + \dots ?$$

۳) برآیند سیگنال $\begin{cases} s_1(t) \\ \vdots \\ s_m(t) \end{cases}$ و تداخل $\begin{cases} P_{e_1} \\ \vdots \\ P_{e_m} \end{cases}$ رابطه آورد.

$$P_e = E[P_{e_i}] = \sum_{i=1}^{m} P_{ei} \cdot P_{s_m}(s_i)$$

احتمال وقوع سیگنال $s_i(t)$ یک ورودی بود/نبود

توجه: به علت آنالیز سیستم Modulator، تقریباً آماری فرض را بدانیم. تا احتمال وقوع حالات مختلف k بیت (P_{s_i}) ارسالی را بدانیم.

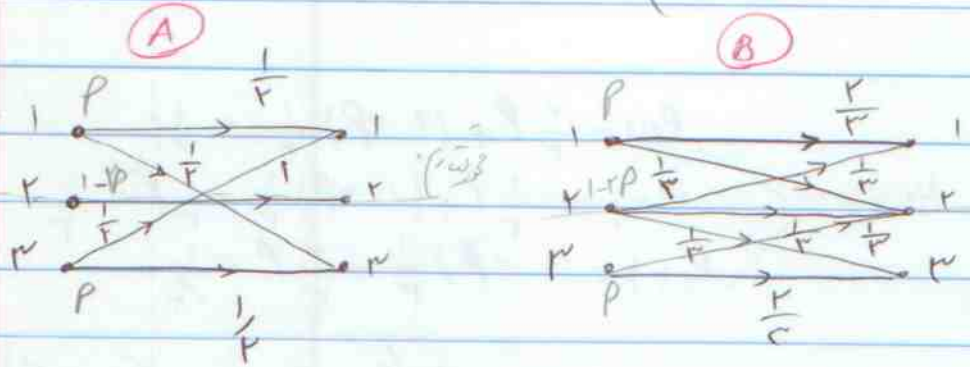
نکته: اگر مسئله احتمالاتی در مورد تعداد ورودی‌ها نداده باشد، آن را یکنواخت در نظر می‌گیریم.

$$P_{s_1} = P_{s_2} = \dots = P_{s_m} = \frac{1}{m}$$

سوال ۲

الف) ظرفیت دو کانال A و B را بیابید.

ب) ظرفیت کانال AB که از سری شدن دو کانال فوق حاصل می‌شود چقدر خواهد بود.



A: کانال تقسیم ← ترکیب احتمال ورودی‌های کانال

$$C = R_{s\max} \cdot H_{\max}(X;Y)$$

$$H(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$H(Y)$: از تساوی ۱ و ۳:

$$P(1) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P = P$$

از ۲:

$$P(2) = 1 - (1-2P) = 2P$$

$$P(3) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P = P$$

$$H(Y) = -\left(P\log P + (1-2P)\log(1-2P) + P\log P\right) = -\left(2P\log P + (1-2P)\log(1-2P)\right)$$

$H(Y|X)$: آنتروپی شرطی

(۱) $H_{(0.5)} = -\left(0.5\log 0.5 + 0.5\log 0.5\right) = -\log 0.5$

(۲) $H = -(1\log 1) = 0$

(۳) $H_{(0.5)} = -\log 0.5$

$$H(Y|X) = P(-\log 0.5) + (1-2P)\times 0 + P(-\log 0.5) = -2P\log 0.5$$

$$H(Y|X) = P\log 4$$

$\Rightarrow H(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = -2p\log p - (1-2p)\log(1-2p) - p\log 2$

$$\frac{\partial H(X;Y)}{\partial p} =$$

$$P(1) = \frac{2}{3}p + (1-2p)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(2) = \frac{1}{3}p + (1-2p)\frac{1}{3} + \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}$$

$$P(3) = (1-2p)\frac{1}{3} + \frac{2}{3}p = \frac{1}{3}$$

B فیلتر: $H(Y)$:

$\hookrightarrow H(Y) = \frac{1}{3}$

$H(Y|X) =$ (1) $H =$

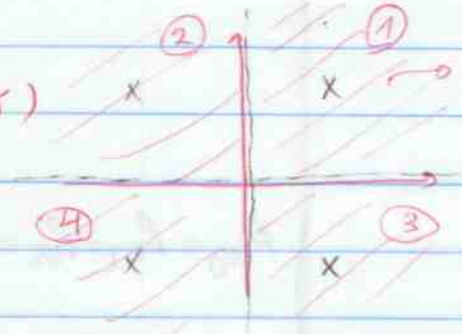
M-ary : $M = r^k$

سیگنال m : $s_1(t)$ ... $s_M(t)$ ← Coms → سطوح s_1 ... s_M ← احتمال خطا → P_{e_1} ... P_{e_M}

توسط آنتن
↳ $P_e = P_{e_{\text{متوسط}}}$

۱) هزینه‌ی
۲) Constellation
} مهم‌ترین P_{e_i} ها

۲) Noise margin مربوط به $s_1(t)$



یک detection یا آشکارسازی

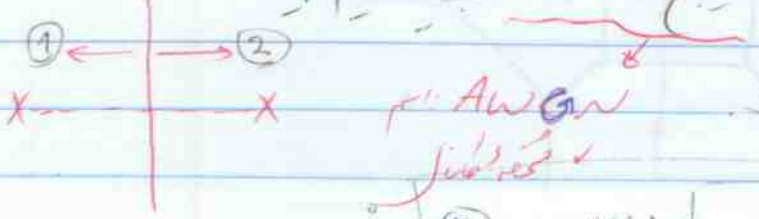
یک مسأله‌ی Decision making (تصمیم‌گیری) می‌باشد.

که بر اساس یک سری قوانین انجام می‌شود (decision rules) و براساس یک تابع هزینه (Cost function) بهینه می‌شود. در این بحث Cost func احتمال خطای دریافت است.

در این بحث، برای آشکارسازی بهینه برای هر نقطه از صورت فضای سیگنال‌ها زون‌بندی می‌شود که هر

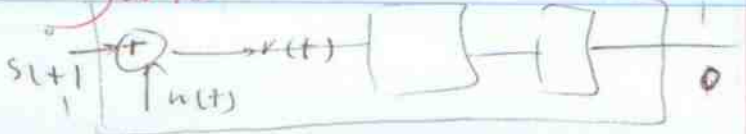
یک از این زون‌ها مربوط به یکی از سمبل‌ها خواهد بود. اولاً این زون‌ها باید به چه شکلی باشند. (با توجه به احتمال بودن ورودی‌ها،

این زون‌ها باید کاری کنند که برای نویز هم تولید شده گوسی فرض شود) تقسیم بین دو نقطه از Const بصورت خط عمود

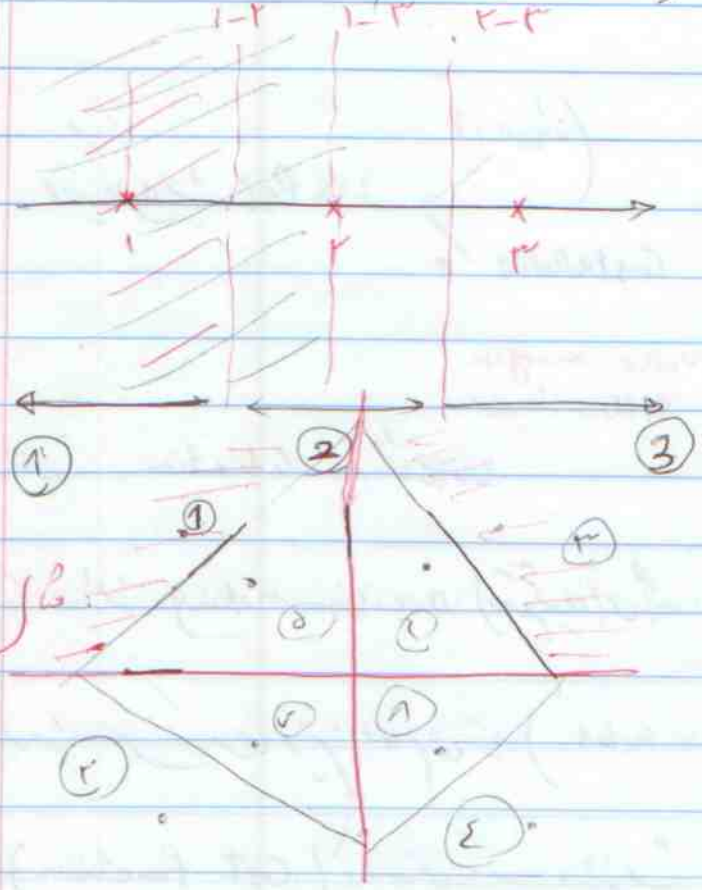


نیمه خط عمود آن است.

نویز AWGN



این عمود منصف‌ها برای تمام زوج نقاط همدیگر را قطع می‌کنند. در واقع هر ضلع توسط عمود منصف نصف می‌شود که نتیجه شامل نقطه مطلوب از نظر تئوری و در نهایت اثبات این است که تمام نیمصفحه‌های فوق (برای تمام نقاط مورد نظر) نامحدب هستند.

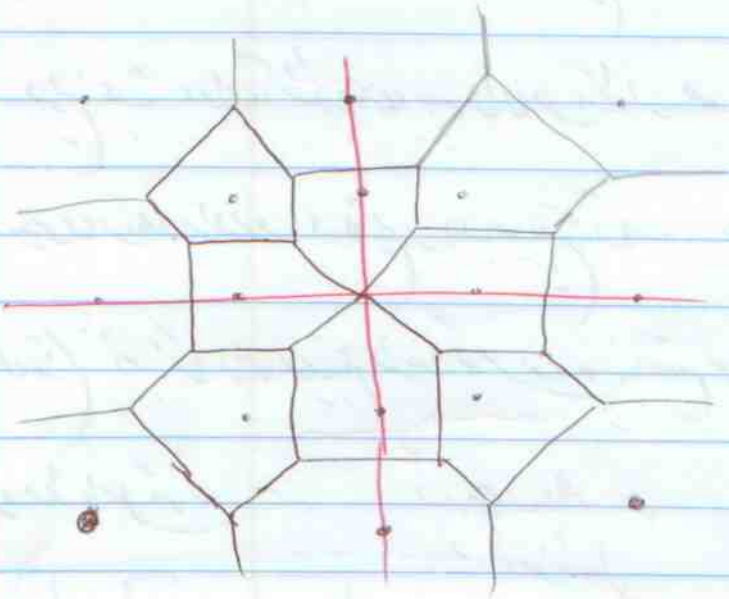


مثال:

$$P_{e_1} = P_{e_2} = P_{e_3} = P_{e_4} = K_1$$

$$n = 8 \quad P_{e_1} = P_{e_2} = P_{e_3} = P_{e_4} = K_2$$

$$K_1 > K_2$$



مثال:

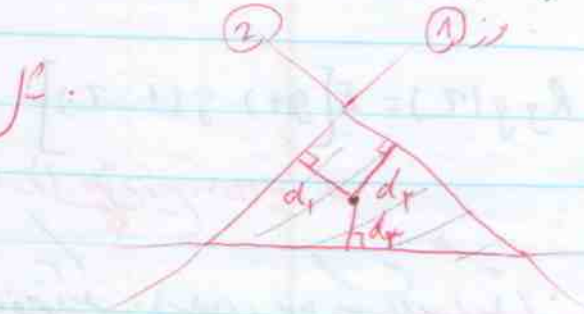
16_avg

$k = 4$

نکته: احتمال خطا برای دو سیگنال همان احتمال خروج از ناحیه‌ی تصمیم‌گیری یکی به سمت دیگری یا مجموع احتمالات گذر از مرزها در نظر گرفته می‌شود. احتمال عبور از مرزی با فاصله‌ی d برابر با $Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$ خواهد بود.

(سیگنال‌ها با نویز گوسی (میانگین = ۰ و واریانس σ^2))

مثال:



مرز تصمیم

احتمال کلی

$$P_e = Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_3}{\sigma}\right) - P(① \cap ②) - P(① \cap ③) - P(② \cap ③)$$

(*)

$$Q(x>0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

تابع Q

* تذکر: بعضی اوقات، خروجی فیلترها دارای اشتراک هستند که باید به دلیل عدم تکرار در رابطه فوق لحاظ شوند و از مجموع کم شوند. ولی عموماً با توجه به کم بودن این احتمالات توأم، این مقادیر تأثیر چندانی ندارند.

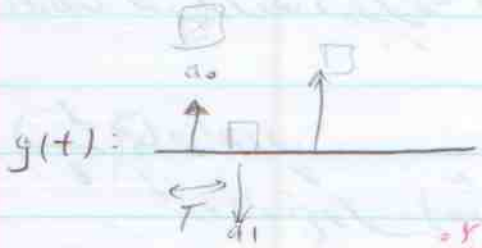
نحوه‌ی محاسبه‌ی توان (PSD) برای سیگنال‌ها:

$$S(f) = S_{PAM}(f) \cdot |H(f)|^2$$

توان سیگنال خروجی — توان سیگنال ورودی — تابع تبدیل

محاسبه PSD برای سیگنال زیر:

$$g(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$$



$$S_g(f) = F\left[R_{gg}(\tau)\right] \quad , R_{gg}(\tau) = E\left[g(t) \cdot g(t-\tau)\right]$$

(اتوکورلیشن)

(سری فوریه)

(مستقل)

$$\begin{cases} \overline{a_k} = \bar{a} \\ \overline{a_k \cdot a_{k+i}} = R_i \end{cases}$$

(با فرض آنکه دنباله‌های a_k یک فرآیند ایستا باشند)

که برای M-ary PAM داریم:

$$a_k \in \{\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(M-1)\} d$$

(می‌توان نشان داد که برای یک PAM هر بار، اتوکورلیشن نیز همین است)

$$R_{gg}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_i R_i \, \delta(\tau - iT)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \quad S_g(f) = \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_i e^{-j\omega iT}$$

$$= \frac{R_0}{T} + \frac{2}{T} \sum_{i=1}^{\infty} R_i \cos(\omega i T)$$

حالت خاص: (در غیر این صورت) اگر علاوه بر ایستا بودن، اعداد ورودی (دنباله‌های a_k) مستقل باشند.

مستقل از هم زمانی که $k \neq n$ داریم:

و توزیع آماری یکسان دارند یعنی احتمال a_k برابر با a_{k+i} است

$$R_i = E[a_k \cdot a_{k+i}] = \begin{cases} E[a_k^2] = \overline{a^2} & i = 0 \\ E[a_k] \cdot E[a_{k+i}] = 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

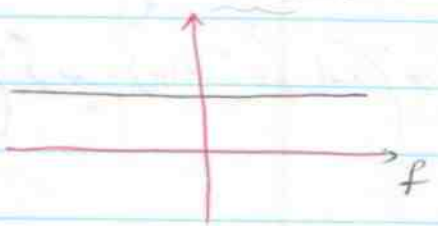
مستقل

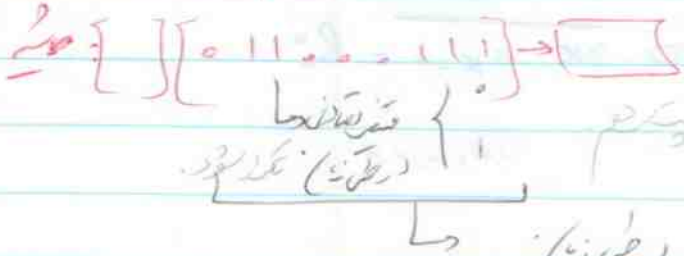
$$\hookrightarrow R_i = \begin{cases} \overline{a^2} & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

$E[a_k] = \bar{a} = 0$ برابر ۰ است. اما دقت داشته باشید که ۲ برابر عدد مثبت یا منفی آنها صفر نمی‌شود. بلکه وضعیت

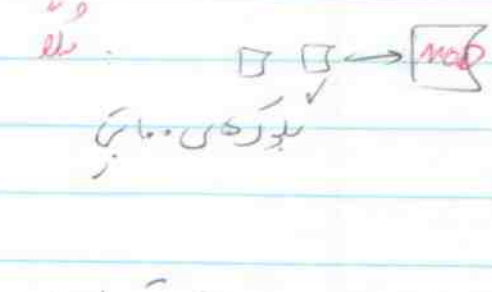
$$S_g(f) = \frac{a^2}{T}$$ در شکل فوق ~ PAM برای

شبیه طیف توان سفید





خاصیت تصادفی: اگر طول بیت‌ها زیاد شود



a_1 (تعیین تصادفی اول) : به ازای بیت‌های شماره ۱

$\overline{a_1}$ بیانگر تعیین اول

اگر Coding عالی شده باشد، با عدد حتی تناظر دوطرفه

هرکدام از عناصر یک بلوک

می‌توانیم از مقادیر هر دنباله میانگین بگیریم $= \bar{a}_i$

اگر این میانگین‌ها ($\bar{a}_k$) برابر باشند، دنباله‌ای که از آن‌ها تشکیل شده است را دنباله‌ی ثابت می‌گوییم به این دنباله، دنباله‌ای ثابت گوییم. در این صورت داریم: $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \dots = \bar{a}_M$

و این صورت میانگین هر دنباله را با $\bar{a}$ نشان می‌دهیم.

تابع اتوکوریلیشن: میانگین حاصلضرب جمله‌های متناظر دو دنباله است. اگر دو دنباله‌ی ایستا

این اتوکوریلیشن به k ربط نداشته باشد و تنها به اختلاف آن‌ها مربوط باشد، باز هم دنباله ایستا گوییم. (حالت دیگر ایستا بود)

از دو تا دنباله ایستا که در ابتدا صحبت کردیم و میانگین گرفتیم

عضو اول از x عضو اول از دنباله‌ی kام ستون $k+i$ام $\Rightarrow \overline{a_k \cdot a_{k+i}} = R_i$

با k خودش می‌شود.

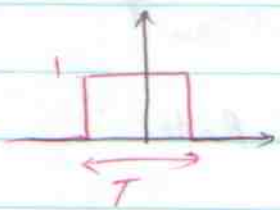
آنالیز سیگنال‌ها:

الف) سیگنال‌های PAM باند پایه (Base Band)

* تعریف سیگنال‌های PAM باند پایه:

۱- تعداد سطوح: $M=2$ یعنی $N=1$

۲- شکل پالس: پالس مستطیلی



$$\frac{1}{\sqrt{T}}\,rect\left(\frac{t}{T}\right)\cdot f(t)$$

Σ_1

$M=2\ (K=1) \rightarrow \begin{cases} s_1(t) = +A\cdot rect\left(\frac{t}{T}\right) \\ s_2(t) = -A\cdot rect\left(\frac{t}{T}\right) \end{cases}$

فرم کلی سیگنال مدوله شده:

$$x_{PAM}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot rect\left(\frac{t-kT}{T}\right) \quad , \quad E\{a_k\}$$

$a_k \rightarrow \{\pm A\}$

* توان PSD: حالت کلی برای دنباله تولید PAM (از $x_{PAM}(t)$)

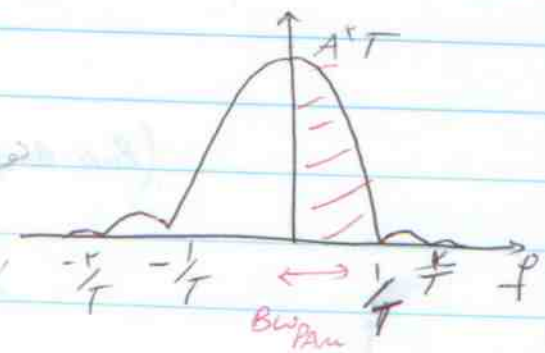
$x_{PAM}(t) = \sum a_k \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right) * \delta(t-kT)$?

برای PAM دوتایی: $\frac{\overline{a^2}}{T} = \frac{\text{تعداد}\left[A^2, (-A)^2\right]}{T} = \frac{A^2}{T}$

برای PAM دوتایی PSD:

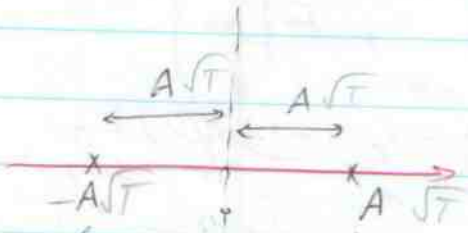
$$\mathcal{P}_{PAM}(f) = \frac{A^2}{T}\left|T\,Sinc(fT)\right|^2$$

$$X_{PAm}(f) = A^2 T \, Sinc^2(fT)$$



$$BW_{PAm} = \frac{1}{T} = \text{Baud Rate} = \text{Symbol Rate}$$

$$\begin{cases} S_1(t) \to P_1 = \frac{E_1}{T} = \frac{A^2 \cdot T}{T} = A^2 \\ S_2(t) \to P_2 = \frac{E_2}{T} = \frac{A^2 \cdot T}{T} = A^2 \end{cases} \quad \to S_T = \text{متوسط}[P_1, P_2] = A^2$$



$$Pe_1 = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right) \qquad Pe_2 = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right)$$

$$Pe = \text{متوسط}[Pe_1, Pe_2] = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right)$$

مثال: محاسبه کلی PAM بدون تأثیر نویز جمع شونده گوسی با مشخصات $N(0, 9)$ (σ^2 توان نویز)

Band Rate $= 10 \frac{kbaud}{sec}$ و متوسط 17 wat ارسال شود. بدون نویز

حل: $S_T = A^2 = 17 \to A = \pm 4$, $\sigma^2 = 9 \to \sigma = 3$

$$BW = \frac{1}{T} = 10 \ [KHz] \to Pe = Q\left(\frac{4\sqrt{10}}{3}\right) = \int_{\frac{4}{3}}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$$

$T = 10^{-4}$ sec

صفحه ۳۵

نکته: در عمل حداکثر مقدار قابل قبول احتمال خطا $P_e = 10^{-6}$ است.

مثال: if $P_e < 10^{-7}$ $\Rightarrow Q\left(\frac{A}{2}\right) < 10^{-7}$ $\Rightarrow$ A بدست می‌آید.

کمترین توان متوسط $S_T = A^2$ خواهد داشت.

$P_e = Q\left(\frac{A\uparrow}{2}\right) \rightarrow$ کمتر

ب) مدولاسیون PAM (Base Band) m-ary:

توضیح: $N=1$ ، m سطح $\leftarrow$ $k = \log_2 M$

پالس پایه $\frac{1}{\sqrt{T}} rect\left(\frac{t}{T}\right)$ ، T: بازه

مثال کلی از سیگنال:

$S_1(t) = (m-1)A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$

$S_2(t) = (m-2)A$ "

$\vdots$

A

$-A$

$-(m-2)A$

$-(m-1)A$

$a_k \in \{\pm(m-1)A, \pm(m-2)A, \dots, \pm A\}$

مثال کلی:

$$x_{m\text{-}PAM}(t) = \sum a_k \cdot rect\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

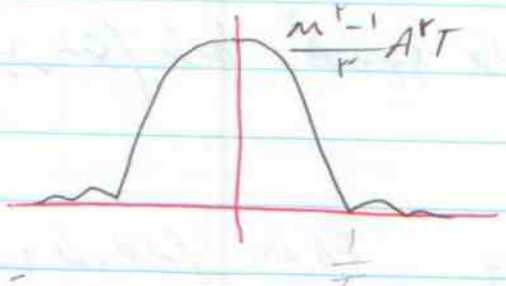
* PSD: $$G_{m\text{-}PAM}(f) = \frac{\overline{a^2}}{T} \left| T Sinc(fT) \right|^2$$

$\overline{a^2} =$ میانگین $\{(-A)^2, (A)^2, (-2A)^2, (2A)^2, \dots, (m-1)^2A^2, (m-1)^2A^2\}$

$= 2A^2 \cdot$ میانگین $\{1^2, 2^2, \dots, (m-1)^2\} = 2A^2 \times \frac{(1^2+2^2+\dots+(m-1)^2)}{m/2}$

$$= \frac{m^2-1}{3} A^2$$

$$\hookrightarrow G_{m-PAM}(f) = \frac{m^2-1}{3} A^2 T \, Sinc^2(fT)$$



$$BW_{m-ary} = \frac{1}{T} = BW_{PAM}$$

آرچه سرعت ارسال بیت ثابت برای دو دو دارم ولی بیشتر تا تفاوت کند

ولی در عوض توان ارسالی در m-ary بیشتر است.

$$R_b = k \cdot R_s = \log_2^m \cdot R_s$$

تعداد بیت‌ها

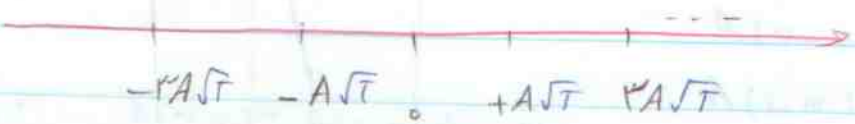
تعداد سمبل‌ها

به ازای تعداد عمل‌های ارسالی در دو دو حالت

با هم برابرند ولی در m-ary دو سمبل ارسالی دو دو بیت است.

تعداد بیت‌هایی که می‌خواهیم ارسال کنیم (k بیت است)

* می‌تونه کاربرد داشته باشه



$$P_e = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right) = 2Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right)$$

$$\text{تعداد } m: \begin{cases} Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right) & \text{برای } 0 \text{ و } m-1 \text{ نقاط اول و آخر} \\ 2Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right) & \text{برای } m-2 \text{ نقاط میانی} \end{cases}$$

$$P_e = \frac{2Q\left(A/\sigma\sqrt{T}\right) + (m-2)Q\left(A/\sigma\sqrt{T}\right)}{m} = \frac{2(m-1)}{m} Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right)$$

۴۵۰

۴ـ۶ـ۲ Band Pass

(الف) On-off Keying ← OOK یا ASK

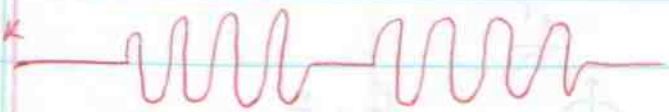
تغییر (شیفت) دامنه بحامل: Amplitude shift Keying

بعد: $N=1$ ← تابع پایه: $\phi(t)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\cos\omega_c t$

OOK:
$$\begin{cases} S_1(t)=0 \\ S_2(t)=A\cos\omega_c t \end{cases} \quad 0\le t\le T$$

ASK (دوتایی):
$$\begin{cases} S_1(t)=A_1\cos\omega_c t \\ S_2(t)=A_2\cos\omega_c t \end{cases} \quad 0\le t\le T$$

OOK



اطلاعات در دامنه قرار گرفته

ASK

Const:

ASK
OOK

پهنای طیف سیگنال مدولاسیون شده:

$$x_{OOK}(t)=\frac{1}{2}\left[1+x_{PAM}(t)\right]\cdot A\cos\omega_c t$$

$$x_{PAM}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \,\mathrm{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

$a_k \in \{\pm 1\}$

نکته: شکل موج $x_{OOK}(t)$ حالت خاصی از مدولاسیون AM پرسته است که در آن PAM باینری ای ارسال شده است.

$* \frac{A}{2}\cos\omega_c t \rightsquigarrow \frac{A}{2} \times \frac{1}{2}\left(\delta(f+f_c)+\delta(f-f_c)\right) \Rightarrow \left|\frac{A}{2}\left(\delta(f+f_c)+\delta(f-f_c)\right)\right|^2$

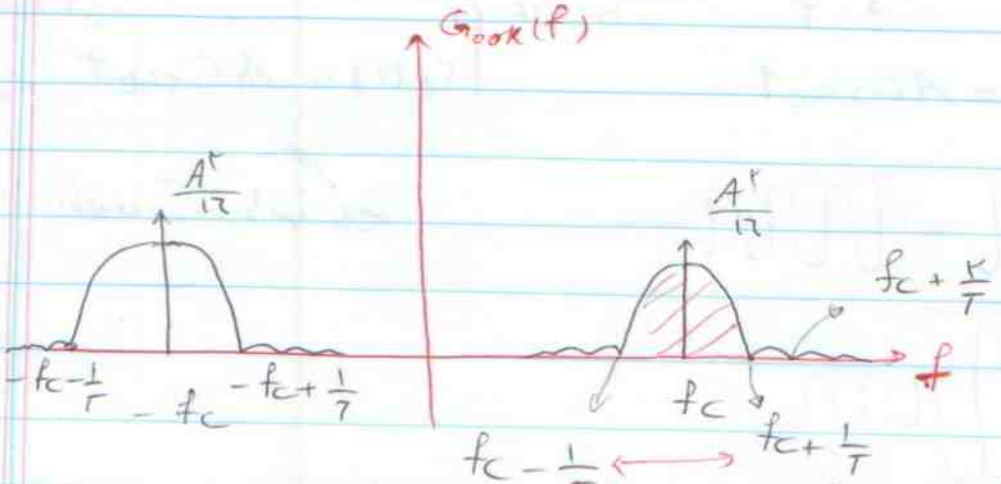
$= \frac{A^2}{16}\left[\delta(f+f_c)\delta(f+f_c)+\delta(f+f_c)\delta(f-f_c)+\delta(f-f_c)\delta(f+f_c)+\delta(f-f_c)\delta(f-f_c)\right]$

$= \frac{A^2}{16}\left[\delta(f+f_c)\delta(\cdot)+\delta(f-f_c)\delta(\cdot)\right] = \frac{A^2}{16}\left(\delta(f+f_c)+\delta(f-f_c)\right)$ ASD ۵ ص ۶

$x_{OOK}(t) = \frac{A}{2}\cos\omega_c t + \frac{A}{2}x_{PAM}(t)\cdot\cos\omega_c t$

$\hookrightarrow^{*} G_{OOK}(f) = \frac{A^2}{16}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right] + \frac{A^2}{4}\left[\frac{G_{PAM}(f-f_c)}{4} + \frac{G_{PAM}(f+f_c)}{4}\right]$

یادآوری: $G_{PAM}(f) = T\,\mathrm{Sinc}^2(fT)$



$BW_{OOK} = \frac{2}{T} = 2\times R_S$

$K=1 \rightsquigarrow R_S = R_b \Rightarrow BW_{OOK} = 2R_b = 2BW_{PAM}$

↙ از نظر پهنای باند نسبت به PAM بهینه‌ی بدتری است (هزینه بیشتر)

از نظر توان: $S_1(t)$ ↓ $P_1 = 0$ ، $S_2(t)$ ↓ $P_2 = \frac{A^2}{2}$

$S_{OOK} = E[P_1, P_2] = \frac{A^2}{4} = \frac{S_{PAM}}{4}$

از نظر توان از PAM بهینه‌ی است. چون دو سطح دارد و یکی از آن‌ها صفر است.

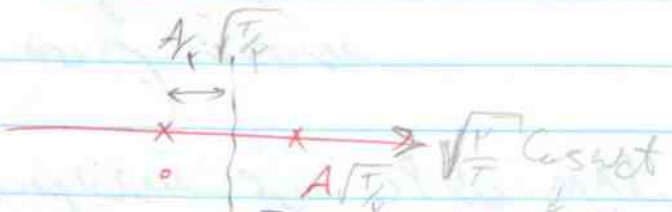
برای مدت ASK نیز به طور مشابه:

$$x_{ASK}(t) = x_{OOK}(t)$$

$$a_k : \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2}[1 + a_1] \\ A_2 = \frac{1}{2}[1 + a_2] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 2A_1 - 1 \\ a_2 = 2A_2 - 1 \end{cases}$$

(توان: $\begin{cases} P_1 = \frac{A_1^2}{2} \\ P_2 = \frac{A_2^2}{2} \end{cases} \rightarrow S_{ASK} = \frac{A_1^2 + A_2^2}{4}$

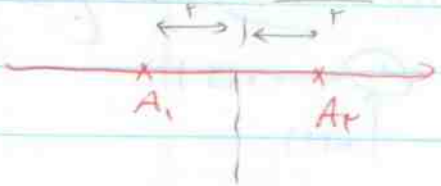
اشکال فضا: OOK:



$$P_{e_1} = Q\left(\frac{A_2 \cdot \sqrt{\frac{T_b}{2}}}{\sigma}\right), \quad P_{e_2} = Q\left(\frac{A_2 \cdot \sqrt{\frac{T_b}{2}}}{\sigma}\right)$$

$$\rightarrow P_e = E[P_{e_1}, P_{e_2}] = Q\left(\frac{A\sqrt{T_b}}{2\sigma}\right)$$

ASK:

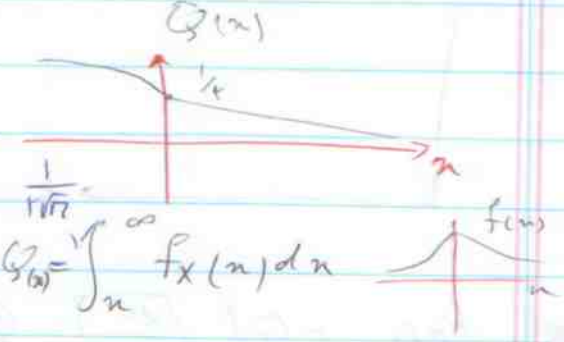


$$P_e = Q\left(\frac{|A_2 - A_1|}{2\sigma}\right)$$

PAM

$$P_e = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right)$$: نسبت به PAM بهتر

$$P_{e_{OOK}} = Q\left(\frac{A\sqrt{\frac{T_b}{2}}}{2\sigma}\right) > P_{e_{PAM}}$$



اشکال فضا نیز شده

$$Q(x) = \int_x^{\infty} f_X(x)\,dx$$

مثال: برای آنکه در OOK، $P_e = 10^{-4}$ داشته باشیم:

$Q\left(\frac{A\sqrt{T_b}}{2\sigma}\right) = 10^{-4}$ ← با مراجعه به جدول ← مقدار $\frac{A}{2\sigma}$ مشخص شود. ($R_b = \frac{1}{T_b}$ نرخ نویز در ریلی (معلوم))

← دامنه ارسالی A مشخص شود. ⇒

$A \uparrow \rightarrow Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \downarrow \rightarrow P_e \downarrow \xrightarrow{\text{آنا}} S_{OOK} \uparrow$

چون به صورت گسسته است، در wireless استفاده می‌شود.

در remote control های ماشین استفاده می‌کردند.

تمرین: به صورت کامپیوتری نمودار مقایسه مقدار P_e برای OOK, PAM

P_e

P_{OOK}

$P_{e_{PAM}}$

A

را به ازای دامنه‌های A مختلف رسم کنید. (در شرایط یکسان)

توجه: مدل نویز جمع شونده‌ی گوسی است. ریلی به زمان ندارد.

$s(t) \rightarrow (+) \rightarrow r(t)$

$\uparrow n(t)$

نکته: عموماً منحنی‌های افتی همانند را جهت توان به ازای سیگنال رسم می‌کنند.

P_e

E_b/S

$P_{e_{PAM}} = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right)$

$S_{PAM} = A^2$ } →

$P_{e_{PAM}} = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 S_{PAM} T}{\eta}}\right)$ ، $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} = \frac{\eta}{2}$

$$P_{e_{OOK}} = Q\left(\frac{A\sqrt{T_b}}{2\sigma}\right) \quad , \quad S_{OOK} = \frac{A^2}{4} \quad \Big\} \rightarrow P_{e_{OOK}} = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2S_{OOK}T}{\eta}}\right)$$

نکته مهم: با مقایسه روابط P_e دوم توانایی بالاتری خواهد داشت که دوبرابر بهره‌وری توان نسبت به روش اول است.

ارسال سیگنال به سه صورت است.

دوباره با مقایسه همان دو رابطه مختصر و مفید انجام شود.

رابطه بین توان و انرژی: $E = S.T$

$$\rightarrow P_{e_{PAM}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta T}}\right) \quad , \quad P_{e_{ASK-OOK}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta T}}\right)$$

T: زمان ارسال یک سمبل

اگر در هر سمبل، k بیت داشته باشیم ($k = \log_2^M$)

$$E_b = S.T_b = \frac{ST}{k} = \frac{E}{k}$$

$k = 1 \rightarrow E_b = E_s$: برای حالت باینری

تذکر: روش‌های سه‌گانه P_e با الگوریتم حل، روش بهینه‌ای باشد.

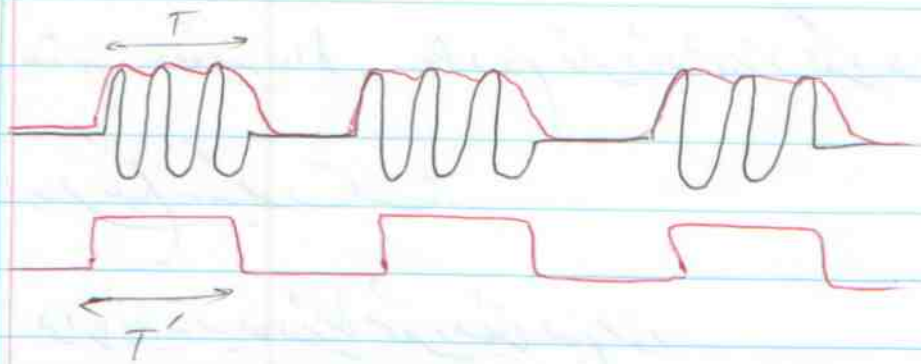
مسئله: از ۱۰ تا ۱۸ : امتحان پایان ترم

سایر روش‌های ساده‌تر مثل روش آشکارسازی پوش‌ها توان گیرنده از آن و Sub optimal بهتر است.

اختلاف فضای بیت

ب) مدولاسیون ASK یا روش آشکارسازی پوش:

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{S_T \cdot T}{4\eta}} \quad , \quad S_T = \frac{A^2}{4}$$



ب) مدولاسیون FSK: Frequency shift keying

استفاده از ۲ دامنه متفاوت برای ارسال ۰ و ۱

$$\text{توضیح} \begin{cases} S_1(t) = A\cos\omega_1 t \\ S_2(t) = A\cos\omega_2 t \end{cases} \quad , \text{ به ازای } N=2$$

نکته:

چنانچه محدوده‌ی زمانی S_1 و S_2 با هم تداخل نداشته باشند، به ازای تمام مقادیر $\omega_1 \neq \omega_2$: $S_1 \perp S_2$ بود

$$\langle S_1(t), S_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega_1 t \cdot \cos\omega_2 t \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_1+\omega_2)t\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_1-\omega_2)t\,dt\right]$$

$$= \frac{\sin(\omega_1+\omega_2)}{\omega_1+\omega_2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} \overset{*}{\simeq} 0 \rightsquigarrow S_1 \perp S_2$$

* چون ω_1 و ω_2 اعدادی بزرگ هستند.

توجه: ولی در اینجا f_1 و f_2 عضو زنی کدوم T دارند

$$\langle S_1(t), S_2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} \cdot \frac{\sin T(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2}$$

→ ؟ → $T(\omega_1 - \omega_2) = K\pi$

آن تبدیل فوریه شکل‌ها در حوزه‌ی فرکانس هم پوشانی نداشته باشند، دوشکل بر هم عمود شده‌اند. در حوزه‌ی فرکانس

وقتی f_1 و f_2 در بازه‌ی زمانی 0 تا T صفر دارند، تبدیل فوریه آنها شکل سینک یافته است

هم پوشانی دارند.

$$\text{if } S_1(t) \perp S_2(t) \Rightarrow T(\omega_1 - \omega_2) = K\pi$$

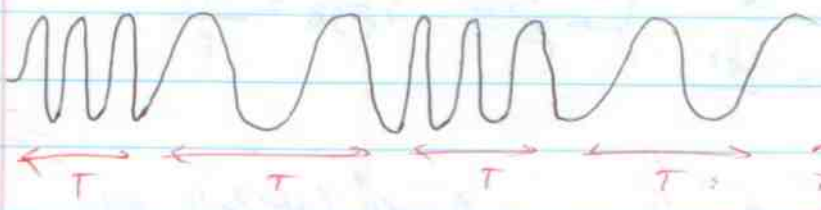
$$\hookrightarrow f_1 - f_2 = \frac{K}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{K}{2} \cdot \text{baudRate} \Rightarrow \Delta f = K \frac{\text{baudRate}}{2}$$ شرط تعامد S_1, S_2

تعامد ← $S_2(t) \perp S_1(t)$

غیر تعامد ← $S_2(t)$ ، $S_1(t)$

تمرین: دو نوع FSK داریم:

در حالت غیر تعامد تعیین پارامترهای مختلف سیگنال مشکل می‌شود.



سیگنال FSK در عمل:

T T T T ...

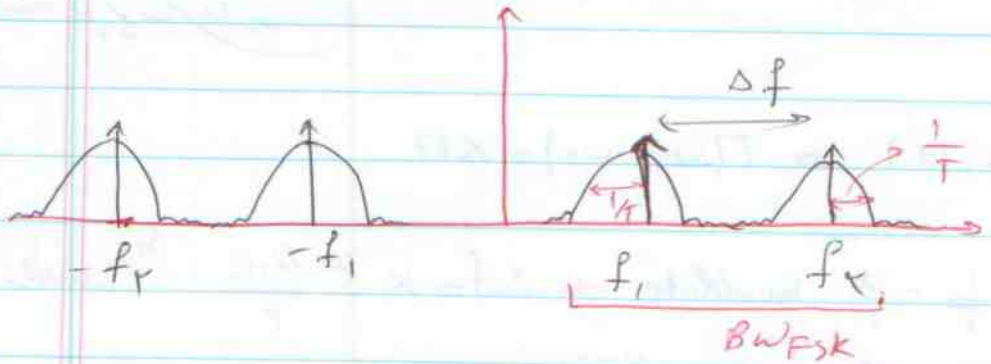
$$\hookrightarrow u_{FSK}(t) = \frac{A}{2}\left[1 + u_{PAm}(t)\right]\cos\omega_1 t + \frac{A}{2}\left[1 - u_{PAm}(t)\right]\cos\omega_2 t$$

$$\sum_K a_K \, \text{rect}\left(\frac{t - KT}{T}\right), \; a_K \in \{\pm 1\}$$

فرم کلی PSD:

$$G_{FSK}(f) = \frac{A^2}{16}\Big[\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)+\delta(f-f_2)+\delta(f+f_2)\Big]$$
$$+ G_{PAM}(f-f_1) + G_{PAM}(f+f_1) +$$
$$G_{PAM}(f-f_2) + G_{PAM}(f+f_2)\Big]$$

$$G_{PAM}(f) = T \cdot Sinc^2(fT)$$



$$BW_{FSK} = \Delta f + BW_{ASK} \quad , \quad BW_{ASK} = \frac{2}{T}$$

نتیجه: از نظر پهنای باند بدتر از ASK (به Δf اضافه دارد).

محاسبه S_{FSK}: $S_1(t) \rightarrow P_1 = \frac{A^2}{2}$ ، $S_2(t) \rightarrow P_2 = \frac{A^2}{2}$ ⟹ میانگین: $S_{FSK} = \frac{A^2}{2}$

نتیجه:

$$S_{FSK} = \frac{S_{PAM}}{2} = 2S_{OOK} \quad (A^2 \rightarrow A^2/4)$$

به ازای دامنه سیگنال ثابت A:

می بینیم، به دلیل عدم امکان ارائه cost در حالت کلی، مجبور به ادامه محاسبات در همین فرم (گسسته) هستیم.

فضای برداری ($\mathbb{R}^n$) ⟷ فضای سیگنال (Cont)

بردار : $S(t)$ ⟷ نقطه

norm ⟷ طول

فاصله دو نقطه $= d(P_1, P_2)$

آیا دو سیگنال را داریم که فاصله‌شان صفر باشد؟

$\text{norm}(S_1(t) - S_2(t)) = 0 \Rightarrow S_2(t) = S_1(t)$: فاصله صفر

نرم

$$\|S_1(t) - S_2(t)\|^2 = \int_0^T (S_1(t) - S_2(t))^2 dt$$

$$= A^2 \int_0^T (\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)^2 dt$$

$$= \frac{A^2}{2}\left[\int_0^T \left[2 + \cos 2\omega_1 t + \cos 2\omega_2 t - 2\cos(\omega_1+\omega_2)t - 2\cos(\omega_1-\omega_2)t\right] dt\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}\left[2T + \frac{\sin 4\pi f_2 T}{4\pi f_2} + \frac{\sin 4\pi f_1 T}{4\pi f_1} - 2\frac{\sin 2\pi(f_1-f_2)T}{2\pi(f_1-f_2)} - 2\frac{\sin 2\pi(f_1+f_2)T}{2\pi(f_1+f_2)}\right], \quad f_1, f_2 \gg 1$$

$$\simeq \frac{A^2}{2}\left[2T - 2\frac{\sin 2\pi(f_1-f_2)T}{2\pi(f_1-f_2)}\right]$$

$$E_s \simeq A^2 T\left[1 - \text{Sinc}(2(f_1-f_2)T)\right], \quad \text{Sinc}\, x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

انرژی اختلاف دو سیگنال

توان متوسط

$$S_{FSK} = \frac{A^2}{2} \rightarrow A^2 = 2S_{FSK}$$

$$\Rightarrow E_\Delta = 2S_{FSK} \cdot T\left[1 - Sinc\left(2T(f_1 - f_2)\right)\right]$$

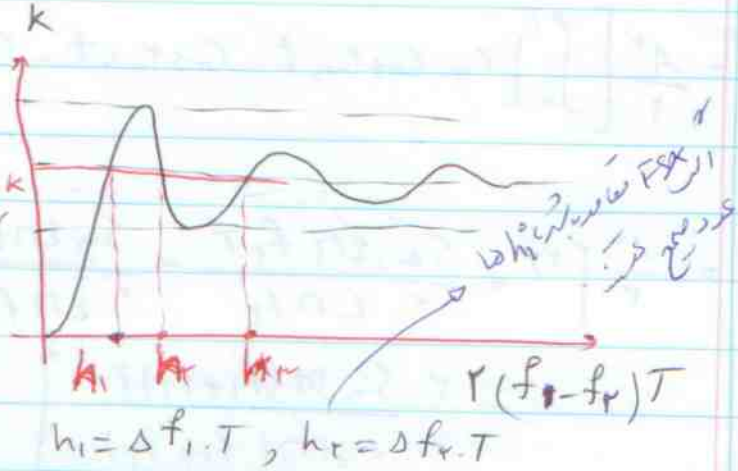
error

$$Pe = Q\left(\frac{d}{\delta}\right) = Q\left(\frac{\left(\frac{\text{اختلاف } S_2(t) \text{ و } S_1(t)}{2}\right) \text{ نصف}}{\delta}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_\Delta}}{2\delta}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{E_\Delta}{4\delta^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_\Delta}{2\eta}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{SR \cdot T}{\eta}\underbrace{\left[1 - Sinc\left[2T(f_1 - f_2)\right]\right]}_{k}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{SR \cdot T\, k}{\eta}}\right)$$



$h_1 = \Delta f_1 \cdot T$, $h_2 = \Delta f_2 \cdot T$

نکته: پارامترهای توان موجود در رابطه احتمال خطا مربوط به توان ذرات است: Bit cycle

مثال: اگر بخواهیم ارسال با FSK و $Pe < 10^{-5}$ داشته باشیم:

$$Q\left(\sqrt{\frac{SR \cdot T}{\eta} \cdot K}\right) \leq 10^{-5}$$

K بدست آید. $K = \frac{S_{FSK} \cdot T}{\eta}$ مقدار (باید معلوم بود) حد

تقسیم پارامترها

در حالت خاص اگر از FSK متعامد استفاده شود:

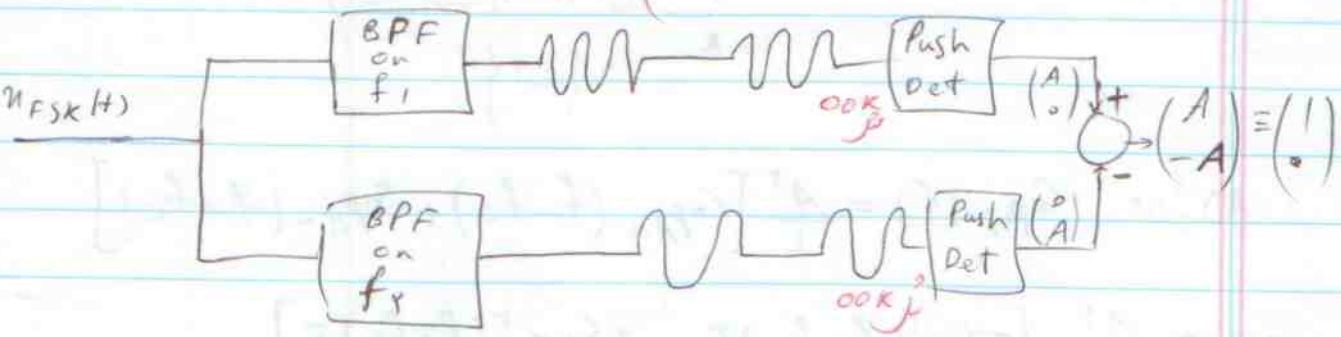
$$f_1 - f_2 = k' \cdot \frac{baudRate}{2} = \frac{k'}{2T}$$

$$\hookrightarrow 2(f_1 - f_2)T = k' \xrightarrow{\text{عدد صحیح}} k = 1 \Rightarrow Sinc(k') = 0$$

$$\hookrightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{S_{FSK} \cdot T}{\eta}}\right)$$

نتیجه: ثابت کسر تبه حاصل از const با ارتقای متعامد است.

۲- روش آشکارسازی پوش (انولوپ) برای FSK:



$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{S_{FSK} \cdot T}{4\eta}}$$

برآورد سایر روش‌ها:

؟ در آشکارسازی همدوس اگر BP غیر ایده‌آل باشد چه اتفاقی می‌افتد؟

ج) مدولاسیون PSK باینری: برای داشتن بیشترین اختلاف (تا حد امکان فاصله بگیرند)

$$\begin{cases} S_1(t) = A\cos(\omega_c t + 0) \\ S_2(t) = A\cos(\omega_c t + \pi) \end{cases}$$

سیگنال‌های ارسالی: $M=2 \leftarrow k=1$

$$\hookrightarrow \begin{cases} S_1(t) = A\cos\omega_c t \\ S_2(t) = -A\cos\omega_c t \end{cases} \rightarrow \text{بیت: } N=1$$

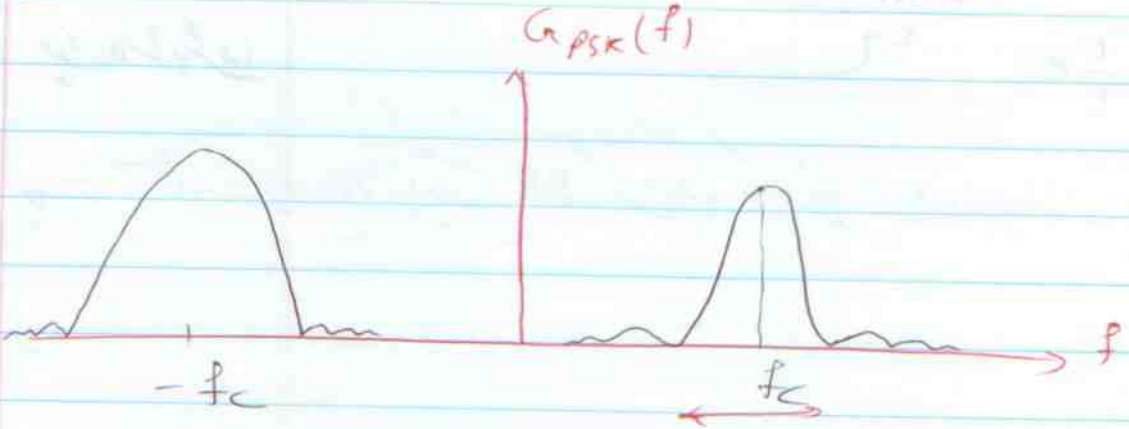
Const:

رابطه خروجی مدولاتور: $n_{PSK}(t) = A \cdot n_{PA_m}(t) \cdot \cos\omega_c t$

$$n_{PA_m}(t) = \sum_k a_k \, \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right), \quad a_k \in \{\pm 1\}$$

PSD: $G_{PSK}(f) = \frac{A^2}{2}\left[G_{PA_m}(f-f_c) + G_{PA_m}(f+f_c)\right]$

$$= \frac{A^2}{2}\left[T\,\text{Sinc}^2(f-f_c)T + T\,\text{Sinc}^2(f+f_c)T\right]$$



$$BW_{PSK} = \frac{2}{T} = BW_{ASK} \; (BW_{OOK})$$

$S_1(t) \rightarrow P_1 = \frac{A^2}{2}$

$S_2(t) \rightarrow P_2 = \frac{A^2}{2}$ میانگین $S_{PSK} = \frac{A^2}{2}$

$S_{PSK} = 2S_{FSK} = S_{ASK}$

$P_e = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{\sigma^2}}\right)$

$= Q\left(\sqrt{\frac{4S_{PSK}T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 S_{PSK} T}{\eta}}\right)$

ASK ازنظر توان بهینه‌تر است (چون توزیع توان در دامنه‌ها یکسان است و تأثیری در این مسئله ندارد)

PSK و FSK از نظر توان تقریباً یکسان عمل می‌کنند.

$n(t) \sim (0, \sigma^2)$ ، $\sigma^2 = E\left[\left[\int_0^T n(t)\cos\omega_c t\, dt\right]^2\right]$

~~تمرین: نشان دهید $Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$ بهینه‌ترین حالت است، σ چقدر و از چه پارامترهایی وابسته است.~~

~~چرا در عمل از حالت بهینه استفاده نمی‌شود و از چه پارامترهایی بستگی دارد؟~~

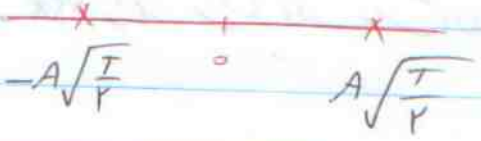
نکته مهم: خواص سیگنال پایه باید دارای norm=1 باشد.

Psk: $\begin{cases} S_1(t) = A\cos w_c t \\ S_2(t) = -A\cos w_c t \end{cases}$ $\xrightarrow{N=1}$ $\begin{cases} S_1(t) = K_1 \phi(t) \\ S_2(t) = K_2 \phi(t) \end{cases}$

$\phi(t) = \cos w_c t \rightarrow \text{norm}(\phi(t)) \neq 1$

باید $\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos wct \rightarrow \|\phi(t)\| = \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot T = 1$

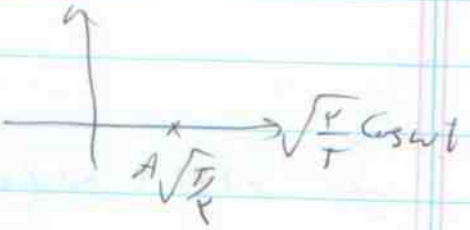
$\begin{cases} k_1 = A\sqrt{\frac{T}{2}} \\ k_2 = -A\sqrt{\frac{T}{2}} \end{cases}$



مانند Ask نوعی Psk اصلح شود.

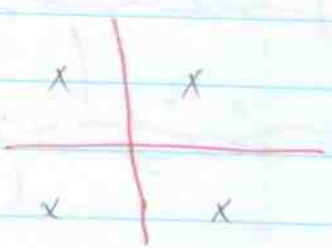
مثال: $S_1(t) = A\cos wt$, $\phi_1(t) = K\cos wt$

$\frac{K^2}{2}\cdot T = E = 1 \rightarrow K = \sqrt{\frac{2}{T}}$



۲) سه و بیشتر) QPSK: بعد حافظه، نوع‌های مختلف برای ورودی انتخاب می‌شوند.

و DQPSK: حافظه‌دار، نوع‌های بیشتر.



برای هر چند ورودی یک اختلاف فاز نسبت به فاز قبلی ایجاد می‌شود.

مثال: $\Delta\phi = 90°$ ، $\Delta\phi = 0°$ ، $\Delta\phi = 180°$ ، $\Delta\phi = 270°$

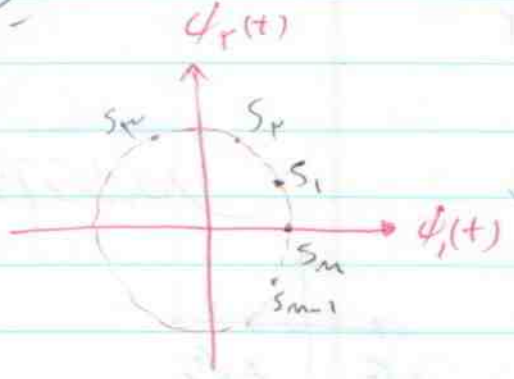
نوعی از مدولاسیون زاویه که در آن اطلاعات با تغییر فاز حامل ارسال می‌شود را ... می‌گویند.

در آشکارسازی ... است.

$k = \log_2 M$ ، سیگنال M-ary : M-PSK : در مدولاسیون

تعداد بیت در هر سمبل ارسال

$$\left.\begin{aligned}\psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\omega_c t \\ \psi_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\omega_c t\end{aligned}\right\} \leftarrow N = 2$$



سیگنال‌های ارسالی

$$\begin{cases} S_1(t) = A\cos(\omega_c t - \frac{2\pi}{M}) \\ S_2(t) = A\cos(\omega_c t - 2\times\frac{2\pi}{M}) \\ \vdots \\ S_M(t) = A\cos(\omega_c t - M\frac{2\pi}{M}) \end{cases}$$

مثلاً: $S_1(t) = A\cos\frac{2\pi}{M}\cdot\cos\omega_c t + A\sin\frac{2\pi}{M}\sin\omega_c t$

$$\Rightarrow S_1 = \left\langle A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi}{M} \;,\; A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi}{M}\right\rangle$$

$$S_2 = \left\langle A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos(2\times\frac{2\pi}{M}) \;,\; A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin(2\times\frac{2\pi}{M})\right\rangle$$

$$\vdots$$

$$S_M = \left\langle A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos(M\times\frac{2\pi}{M}) \;,\; A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin(M\times\frac{2\pi}{M})\right\rangle$$

مدولاسیون M-PSK

$$s_{M-PSK}(t) = Ab_1(t)\cos\omega_c t + Ab_2(t)\sin\omega_c t$$

$$\begin{cases} b_1(t) = \sum a_k \,\text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right), & a_k \in \left\{\cos(\frac{2\pi}{M}), \cos(2\times\frac{2\pi}{M}), \dots, \cos(M\frac{2\pi}{M})\right\} \\ b_2(t) = \sum b_k \,\text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right), & b_k \in \left\{\sin(\frac{2\pi}{M}), \dots, \sin(M\frac{2\pi}{M})\right\} \end{cases}$$

PSD: $|\bar{a}^2| = \frac{1}{n}\left[\cos^2\frac{2\pi}{n} + \cos^2 2\times\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos^2 n\times\frac{2\pi}{n}\right]$

$|\bar{b}^2| = \frac{1}{n}\left[\sin^2\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin^2 n\times\frac{2\pi}{n}\right]$

$G_{PAM_1} = \frac{|\bar{a}^2|}{T}\left(T\,\mathrm{Sinc}^2(fT)\right),\quad G_{PAM_2} = \frac{|\bar{b}^2|}{T}\left(T\,\mathrm{Sinc}^2(fT)\right)$

$\Rightarrow BW = \frac{2}{T} = 2R_S$

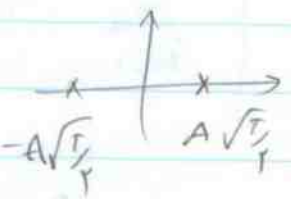
نتیجه: BW برای M تایی نسبت به باینری $\frac{1}{\log_2 M}$ است.

$R_b = KR_S = K\frac{BW}{2} = \log_2 M \cdot \frac{BW}{2}$

$S_{MPSK} = \frac{A^2}{2}$

توان توسط آنالیز

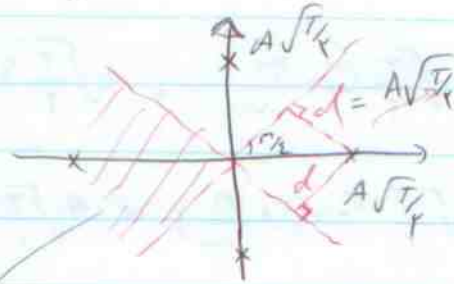
P_e: if $M=2$ → Binary PSK:



$P_e = Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\frac{A}{2}\cdot\sqrt{T}}{\sigma}\right)$

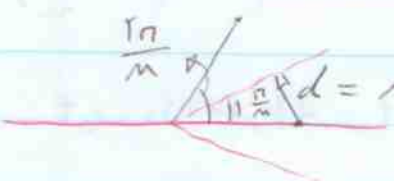
if $M=4$ → QPSK

فرم دیگر نوشته شده



$P_e = 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)\cdot Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) \simeq 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) = 2Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{2\sigma}\right)$

فرمت کلی:



$P_e \simeq 2Q\left(\frac{A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\frac{\pi}{M}}{\sigma}\right)$

اگر تعداد کنترل‌های نوع‌های روی یک محور یک PAM داشته باشیم

مدولاسیون M-QAM : Quadrature Amplitude modulation

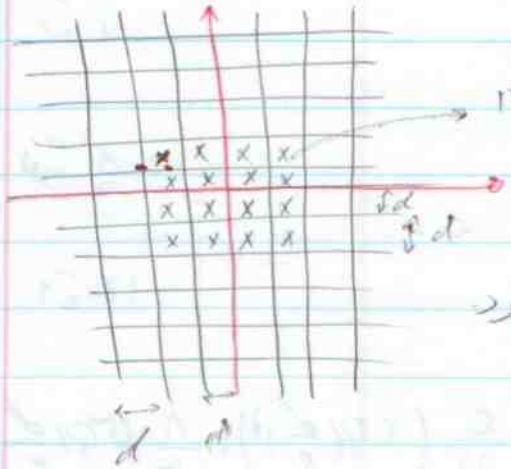
مثال : 16-QAM
128-QAM
256-QAM

$N=2 \longrightarrow \begin{cases} \phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_c t \\ \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_c t \end{cases}$

در این مدولاسیون، صفحه دو بعدی به

grids با ابعاد d تقسیم می‌شود.

نقاط در راس گوشه‌های حاصل از این grid انتخاب می‌شود.



اگر 16-QAM نزدیک‌ترین نقاط به مبدا مختصات حذف شوند.

یعنی نقاط گوشه‌ای را انتخاب نکنیم تا توان کمتری مصرف شود.

نکته : برای تمام خانواده‌های مدولاسیون دوبعدی :

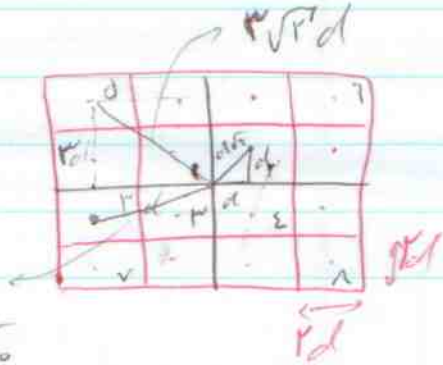
$BW = \frac{2}{T} \quad , \quad R_b = \frac{BW}{2} \log_2^M$

در این حالت می‌توان دو مدولاسیون AMP روی محورهای متعامد یا quadrature در نظر گرفت

که در نتیجه توان و اقلیدسی بین نقاط ثابت بماند.

مثال : برای 16-QAM :

الف) توان متوسط ارسالی.



$P_1 = P_3 = P_5 = P_7 = 2d^2 \times \frac{1}{2}$ ← $d\sqrt{2}$: نقاط

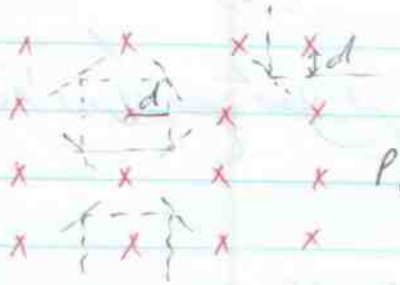
$P_8 = P_{11} = 18d^2 \times \frac{1}{2}$ ← $2d\sqrt{2}$: نقاط

$P_9 = \dots = P_{16} = 10d^2 \times \frac{1}{2}$ ← $d\sqrt{10}$: نقاط

وضعیت نقاط:

$$P_{s-QAM} = \frac{1}{16}(4P_1 + 4P_8 + 8P_9)$$

حدود اجتماع خطا:



۴ تا :

$$P_{e_1} = 4Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

۸ تا :

$$P_{e_8} = 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

۴ تا :

$$P_{e_9} = 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

$$P_e = E[P_{e_i}] = \frac{4}{16}\left(4Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)\right) + \frac{8}{16}\left(2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)\right) + \frac{4}{16}\left(2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)\right)$$

$$= 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

(از قبل: $S_{M-QAM} = 5d^2 \rightarrow d^2 = \frac{S_{M-QAM}}{5}$)

$$\therefore P_e = 2Q\left(\frac{\sqrt{\frac{S}{5}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)$$

$S_1(t) = A\cos\omega_1 t$

$S_2(t) = A\cos\omega_2 t$

$\vdots$

$S_M(t) = A\cos\omega_M t$

M-FSK : سیگنالینگ

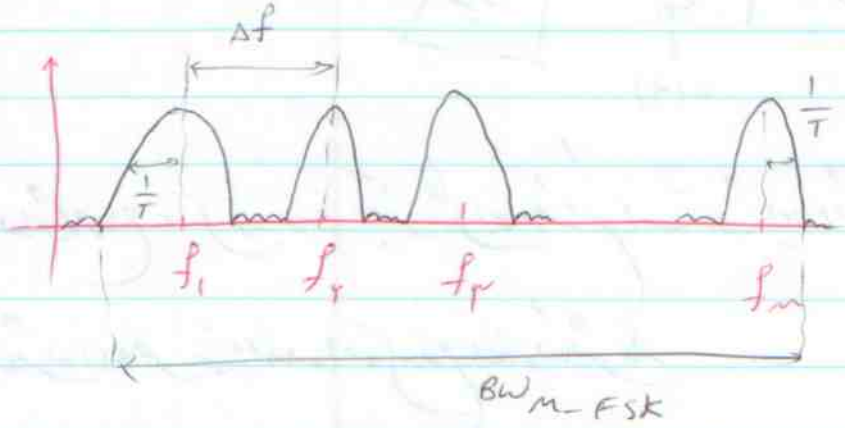
در حالت کلی فضای M بعدی داریم.

برای برقراری تعامد در سیگنال:

$$f_i - f_j = n \cdot \frac{\text{baudRate}}{2} = \frac{n}{2T}$$

عدد صحیح

به لحاظ طیفی شبیه M تا OOK حول فرکانس‌های f_1 تا f_M است.



$$BW_{M-FSK} = \frac{2}{T} + (M-1)\Delta f \Rightarrow BW_{min} = \frac{2}{T} + \frac{(M-1)}{2T}$$

$$\Delta f_{min} \xrightarrow{n=1} \frac{1}{2T} \qquad = \frac{1}{T}\left(\frac{M+2}{2}\right)$$

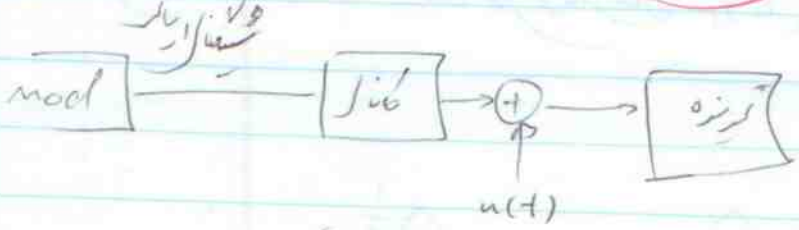
تمرین: احتمال خطا را به دست آورید.

$$P_e = (M-1)\,Q\left(\sqrt{\frac{S_{M-FSK} \cdot T}{\eta}}\right)$$

تمرین: تفسیر دو حالت FSK باینری و ASK را کلی‌تر ($M=2$)

$M=4$: $\begin{cases} s_1 \\ \vdots \\ s_4 \end{cases}$ دامنه : $\begin{cases} A_1 \\ A_2 \end{cases}$ ، فرکانس : $\begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases}$

گیرنده‌های دیجیتال



در اثر عبور کانال و به خصوص تغییر شکل ایجاد شده کمی است که باعث ایجاد اشتباه در گیرنده می‌شود. بنابراین باید روش‌های خاصی جهت به حداقل رساندن احتمال وقوع خطا را به کار برد.

دو عامل مهم: کانال ← محدودیت پهنای باند (I) — شکل نامناسب پالس فرستاده شده — اعوجاج دامنه و فاز
نویز ← فقط با افزایش $\frac{E_b}{N_0}$ بهبود می‌یابد.

equalizer ←

راه حل (I): ۱- محدود کردن پهنای باند سیگنال ارسالی توسط MOD (ISI می‌دهد)
۲- ISI منتقل شده

ISI: Inter symbol interference تداخل بین سمبل

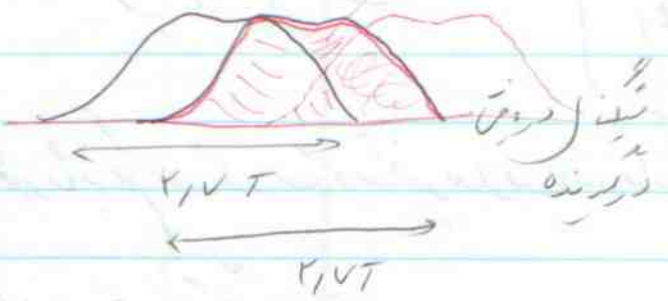
مثال: PAM دنباله‌ای تصادفی

شکل ۲۹۸ انتشار main lobe :

این مطلب به صورت سیگنال از کانال

به بیرون باند محدود، بخشی از خاصیت‌های آن از بین رود. چون در صورت فرکانس سیگنال فیلتر داده می‌شود،

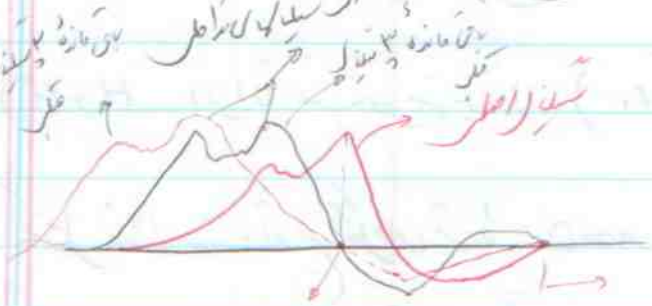
در صورت کاهش عرض پالس اثر آن بیشتر باید.



راه‌حل برای ISI:

۱/ ISI حذف: اجازه فیلتینگ به کانال داده نشود. یعنی پهنای باند سیگنال ارسالی باید محدود باشد. (انتخاب g(t) - سیگنال پایه - با شکل مناسب)

۲/ ISI کنترل شده:



برای سیگنال بین آمده است.

ISI نیست کنترل است ← در این نقطه جمع سیگنال‌ها برابر صفر

در صورت ارضای شرط نایکوئیست برای ISI کنترل شده، سیگنال ایده‌آل است.

شکل موج مناسب برای این منظور بدست آورد.

برای ... مدار یکسان‌سازی فیلترهای گیرنده را به نحوی انجام داد که

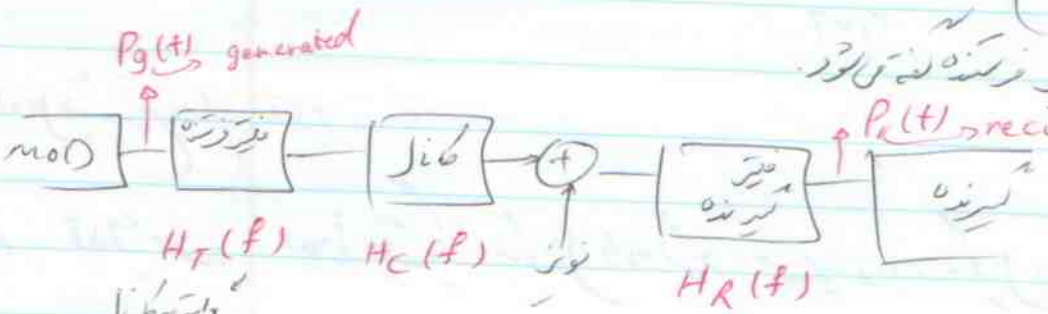
سیگنال ارسالی → [کانال] → سیگنال دریافتی

فیلتر گیرنده تشکیل شود. $\begin{cases} h_R(t) \\ H_R(f) \end{cases}$

توجه: کانال را هم می‌توان نوعی فیلتر دانست. $\begin{cases} h_C(t) \\ H_C(f) \end{cases}$

به طور شماتیک کلی است در سمت فرستنده نیز بعد از تولید سیگنال مدار دیگری با اهداف خاصی مثل تطابق با کانال

برای نیز فیلتر فرستنده تشکیل می‌شود.



$H_R(f)$ همواره وجود دارد. زیرا که اگر برای کم کردن نویز ورودی به کار می‌رود.

$H_T(f)$: الزاماً نیست که نیاز ($H_T(f)$ به صورت شکل دهی سیگنال ارسالی برای تطابق ضرب کنترل شده است، آن این شکل دهی توسط MOD انجام شده باشد، نیازی به $H_T(f)$ نیست. ولی اگر MOD عوض (generd) باشد، به تبعیت نوع کانال و ... نیاز به $H_T(f)$ مناسب نیز اضافه کرد.

$$P_r(t) = P_g(t) * h_T(t) * h_C(t) * h_R(t)$$

$$P_r(f) = P_g(f) \cdot H_T(f) \cdot H_C(f) \cdot H_R(f)$$

سیگنال ارسالی (مدولاسیون دامنه):

$$n(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \cdot P_g(t-kT)$$

دریافتی:

$$y(t) \triangleq \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot P_r(t-kT)\right] + n(t)$$

نکته مهم: $y(t)$ صرفاً در لحظات نمونه‌گیری آسیب دارد.

$$y(mT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot P_r((m-k)T) + n(mT)$$

مشاهده می‌شود که ISI در صورتی که به ازای kهای مختلف $P_r((m-k)T)$ باقی بماند

این دو خواهد شد.

شرط عدم وقوع ISI آن است که صرفاً پالس متناظر با $k=m$ باقی بماند و بقیه kهای دیگر صفر شوند.

$$y(mT) = a_m \cdot P_r(0) + n(mT)$$

شرط ناگوئیست برای عدم ISI:

$$P_r((m-k)T) = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ P_r(0) = \text{عدد} & m = k \end{cases}$$

سیگنال ارسالی

$$n(t) = \sum a_k P_g(t-kT)$$

سیگنال دریافتی

$$y(t) = \sum a_k P_r(t-kT)$$

$P_r(0)$

Raised Cosine

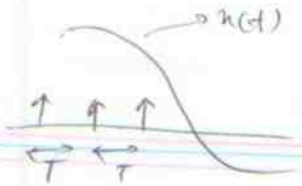
$$L_0 \; y(mT) = K a_m + \text{نویز}$$

متغیر تصمیم‌گیری

ها

هدف: نویز را کم کنیم.

بهترین حالت $\frac{E_b}{N_0}$ را داشته باشیم.



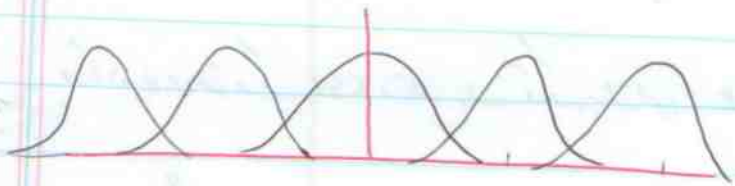
خروجی برداری : $Comb_T[h(t)]$

بیان دیگر از شرط نایکوئیست:

$$Comb_T[P_r(t)] = K\delta(t)$$

$$\xrightarrow{F} \frac{1}{T} Rep_T[P_r(f)] = K'$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_r\left(f - \frac{K}{T}\right) = K'T = cte$$

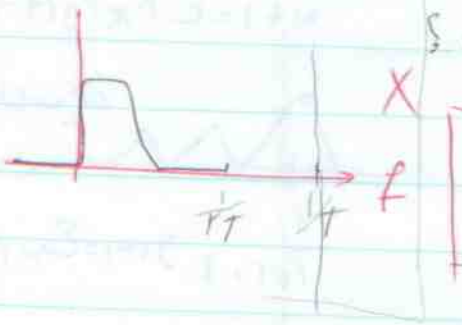


برای برقرار شدن شرط نایکوئیست حوزه فرکانس:

کافیست شکل $P_r(f)$ را از 0 تا $\frac{1}{T}$ در نظر گرفته، آن را نسبت به خطوط 0 و $\frac{1}{2T}$ تا زیر و سپس جمع کرده. اگر Flat شد برقرار است.

سوال 1: آیا پالس با پهنای باند کمتر از $\frac{1}{2T}$ شده، اگر) امکان ایجاد شرط نایکوئیست دارد؟ خیر

سوال 2: برای $\frac{1}{2T}$ به ازای

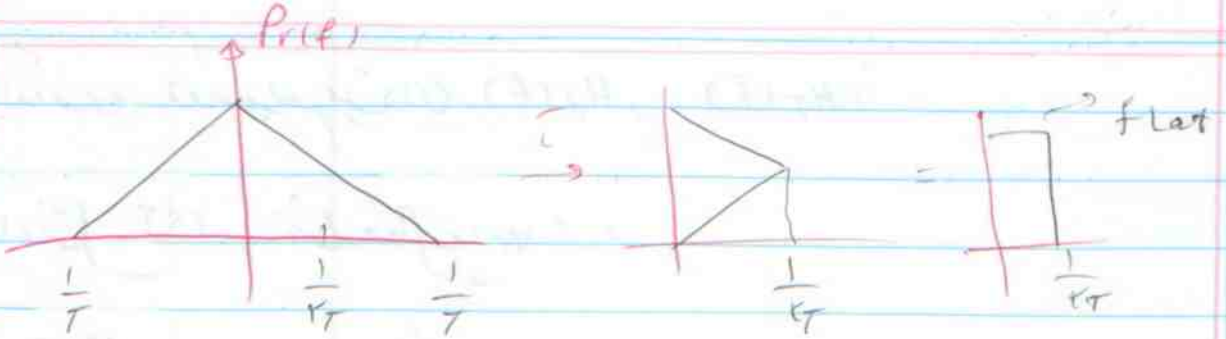


به فقط DC میشه ←

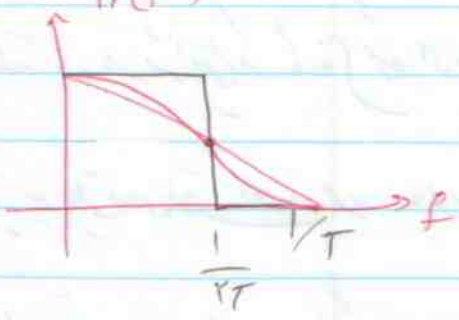
$P_r(f) = T Sinc(fT)$ ←

خیر قابل ساخت (غیرعلی)

سوال 3: برای پالس‌های با پهنای باند بیشتر از $\frac{1}{2T}$ شرط نایکوئیست) امکان وجود دارد؟

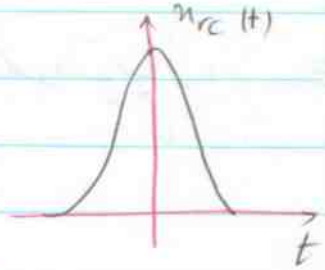


کلاً اگر شکل دارای تقارن فرد نسبت به مقدار $\frac{1}{2T}$ باشد، کافی است



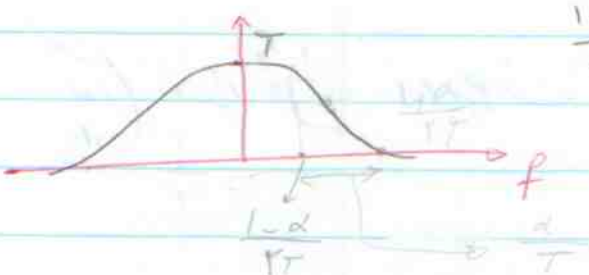
یک شکل‌هایی وجود دارد که شرایط بالا را دارند و به راحتی آنالیز و کنترل می‌شوند. Raised Cosine

$$n_{RC}(t) = \frac{\sin\frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} * \frac{\cos\left(\frac{\pi\alpha t}{T}\right)}{1 - 4\alpha^2\frac{t^2}{T^2}}$$



$$X_{RC}(f) = \begin{cases} T & 0 \le |f| \le \frac{1-\alpha}{2T} \\ 0 & o.w \\ \frac{T}{2}\left[1 + \cos\frac{\pi T}{\alpha}\left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T}\right)\right] & \frac{1-\alpha}{2T} \le |f| \le \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases}$$

rolloff: α factor



یادآوری: دو معادله در تعیین فیلترهای $H_R(f)$ و $H_T(f)$:

۱. کنترل ISI: ناشی از کانال و بخش‌های باند محدود

۲. حذف نویز (نویز کانال)

نکته: در شرایطی که کانال نحوه‌ای خواص داشته باشد، باید برای جبران آن equalizer را نیز به فیلترهای فوق اضافه نمود. ولی برای سادگی فعلاً فرض می‌کنیم کانال از این نظر ایده‌آل و همانا دارای تضعیف یا فاز ثابت (پهنای باند محدود است).

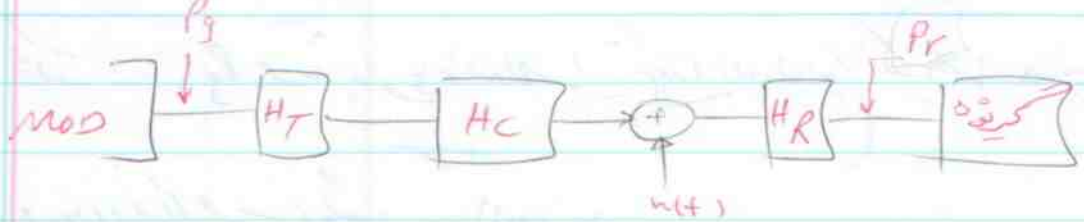
ابتدا حتی قبل کانال پهنای باند محدود (نرفته) شده، فیلتر HR برای محدود کردن نویز و محدودی پهنای باند کل سیستم را می‌بندد.

محدودیت پهنای باند ≡ ایجاد ISI

شرط نایکوئیست: $P_r(t)\Big|_{\substack{t=kT \\ k\neq 0}} = 0$ (حوزه زمان)

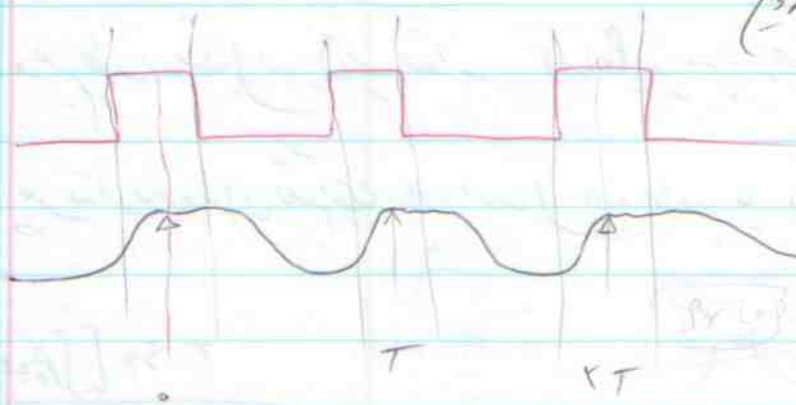
تقارن فرد برای شکل $P_r(f)$ نسبت به $\frac{1}{2T}$ (حوزه فرکانس)

شرط دوم برای انتقال موثر: باید عدای شرط $\frac{1}{T}$ را داشته باشیم.



$$P_r(f) = P_g(f) \cdot H_T(f) \cdot \underbrace{H_C(f)}_{\frac{1}{L}} \cdot H_R(f)$$

برای تعمیم آنرا در مورد اطلاعات داریم



پالس ارسالی به ازای $0 < t < T$

نمونه‌ای از $P_r(t)$ در لحظه t

آنرا نمونه‌گیری کنیم.

$$P_r(0) = ? \qquad P_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_r(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df$$

$$\Rightarrow P_r(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_r(f)\, df \quad (=) \text{ دوره}$$

$P_r(0)$ به عنوان توان واحد آنرا با واحد Ω و مقاومت 1Ω در نظر گرفته شود. پس توان $P_r(0)$ برابر 1Ω است.

این توان از فیلتر $H_R(f)$ عبور کرده است. بنابراین برای محاسبه توان $P_r(0)$ باید توان نویز فیلتر شده را بدست آوریم.

$$S_i \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow S_o = S_i |H(f)|^2$$

$\frac{N_0}{2}$ طیف توان نویز سفید $\rightarrow S_o = \frac{N_0}{2} \cdot |H_R(f)|^2 \rightarrow P_N = \int S_o\, df = \frac{N_0}{2} \int |H_R(f)|^2 df$

چگالی طیف توان نویز

$$P_r(f) = \frac{P_g(f) \cdot H_T(f) \cdot H_R(f)}{L} \quad (III)$$

نکته: P_g معمولاً باید داده شده است (یا از روی صورت سوال) که دانرژی a نیز به نوع اطلاعات

ورودی بستگی دارد. $\times |H_T(f)|^2$

توان ارسالی (ورودی کانال): $S_T = \frac{a^2}{T} \int |P_g(f)|^2 df$ (I)

و همین طور در شکل دریافتی نیز مقدار $P_r(0)$ نیز باید در ضریب a ارسالی ضرب شود.

پس مقدار موجود برای تصمیم‌گیری برای ارسال a، برابر با $aP_r(0)$ است.

توان نویز: $S_R = a^2 P_r^2(0)$

توان سیگنال

$$S\backslash N R = \left(\frac{S}{N}\right) = \frac{a^2 (P_r(0))^2}{\frac{N_0}{2} \int |H_R(f)|^2 df} \overset{(I)}{=} \frac{T \cdot S_T \cdot \left[\int P_r(f) df\right]^2}{\frac{N_0}{2} \int |P_g(f)|^2 df \int |H_R(f)|^2 df} \overset{(II)}{=}$$

توان نویز

$$\overset{(III)}{\Rightarrow} S\backslash N R = \frac{2T S_T}{L^2 N_0} \cdot \frac{\left[\int P_g(f) \cdot H_T(f) \cdot H_R(f) df\right]^2}{\int |H_R|^2 df \cdot \int |P_g|^2 df}$$

حال باید $S\backslash N R$ فوق را ماکزیمم نمود. برای ماکزیمم سازی از نامساوی کوشی - شوارتز استفاده می‌کنیم:

نامساوی کوشی - شوارتز: اگر u و v توابعی از f باشند:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot v^* df\right]^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |v|^2 df$$

مانند: طول v^* طول u حاصلضرب سوال بین در تقویر یکی

بردارها روی دیگری

علاوت ساده‌ی مقابل را در نظر بگیرید که تقویت برابر با عدد ثابت K_0 است.

$$u = K_0 e$$

پهنای باند $5.NR$ فرض شده است و i_{max} از روابط ساده‌ی به‌ازای $u = K_0 e$ به‌دست می‌آید.

$$P_g . H_T = K_0 H_R^* \quad , \quad H_T H_R = \frac{L . P_r}{P_g}$$

$$L_0 |H_R|^2 = \frac{L}{K_0} . P_r(f) \quad , \quad |H_T|^2 = L K_0 \frac{P_r(f)}{|P_g|^2}$$

جمع‌بندی:

۱- در ضلع گیرنده‌ی کانال باید $P_r(f)$ متناسب شود. (با استفاده از یک مدار ساده‌ی RC)

۲- انتخاب شکل $P_g(f)$ برای پیک ارسال (که به نوع مدولاسیون بستگی دارد)

۳- تقسیم کلیه‌ی دامنه‌ی طیفی H_R و H_T

تکته: چنانچه $P_g(f)$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که در کل پهنای باند ثابت بوده و استاندارد مقداری ثابت باشد، داریم:

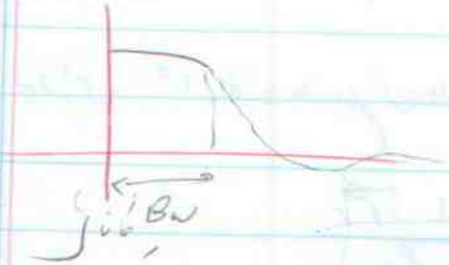
$$|P_g(f)|^2 = k'$$

$$\begin{cases} |H_R|^2 = \frac{L}{K_0} P_r(f) = K_1 P_r(f) \\ |H_T|^2 = \frac{LK_0}{K^2} P_r(f) = K_2 P_r(f) \end{cases}$$

؟ چرا تابع تبدیل وجود دارد؟ وجود هر کدام چه تاثیری دارد؟

برای فیلترهای دو طرف یک شکل خواهد بود (با بهره‌های متفاوت)

در نتیجه طراحی و ساخت آنها بسیار ساده‌تر خواهد بود.



می‌توان با انتخاب عرض پالس در حوزه زمان، شرط فوق را اصلاح کرد.

نکته: به دلیل نویز، امکان تفکیک H_T و H_R در یک گیرنده وجود ندارد.

عموماً از فیلتر گیرنده برای مقابله با نویز و از فیلتر فرستنده برای شکل‌دهی طیفی نامتقارن استفاده می‌شود.

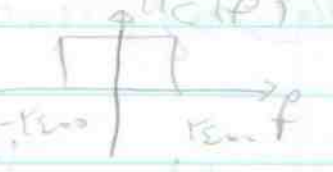
نکته: روابط تخصیص دامنه فیلترهای فوق با توجه به کانال، تقریباً تضعیف‌کننده نویز سفید بدست آمده است.

در حالت کلی‌تر برای کانال با پاسخ دلخواه $H_c(f)$ و نویز با چگالی طیفی $G_n(f)$ می‌توان:

$$\begin{cases} |H_R(f)|^2 = \frac{1}{K_0} \left| \frac{P_r(f)}{H_c(f)} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{G_n(f)}} \\ |H_T(f)|^2 = \frac{K_0}{} \cdot \left| \frac{P_r(f)}{H_c(f)} \right| \cdot \frac{\sqrt{G_n(f)}}{|P_g(f)|^2} \end{cases}$$

مثال: یک سیستم باندپایه PAM برای انتقال اطلاعات با نرخ $36000 \frac{bit}{sec}$ استفاده می‌کند. کانالی با پهنای باند کافی در دسترس است که نویز آن دارای $G_n(f) = 10^{-12} \frac{W}{Hz}$ است. طراحی نمایید.

$$H_c(f) = \begin{cases} 10^{-2} & |f| < 2400\ Hz \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

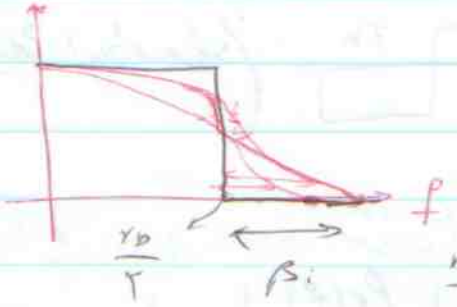


حل: $R_b = 36000 \frac{bit}{sec}$, $BW = BW_{min} = 2400\ Hz$

$G_n(f) = 10^{-12} \frac{W}{Hz}$ توزیع نویز

۱- انتخاب شکل پالس از لحاظ ISI دیگر بدون

نوع: Raised Cosine



ایده‌آل: $\frac{r_b}{2}$

هرچه تأخیر زمانی، کمتر شود، β کمتر می‌شود.

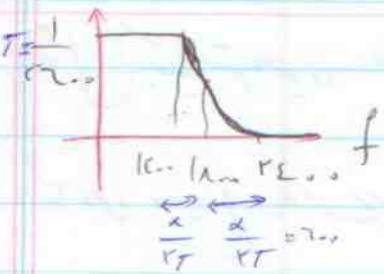
$BW = \frac{r_b}{2} + \beta$, $\beta = \frac{\alpha}{2T}$

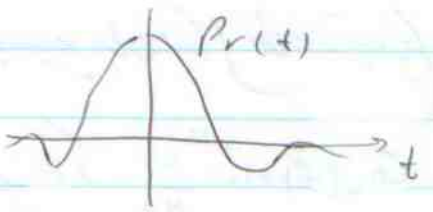
$2400 = 1800 + \beta \rightarrow \beta = 600$ $\left(\rightarrow \beta = \frac{R_b}{6}\right)$ $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$

roll-off factor

$$P_r(f) = \begin{cases} \frac{1}{4800} & |f| < 1200 \\ \frac{1}{4800} \cos^2 \frac{\pi}{4800}(|f| - 1200) & |f| < 2400 \\ 0 & \end{cases}$$

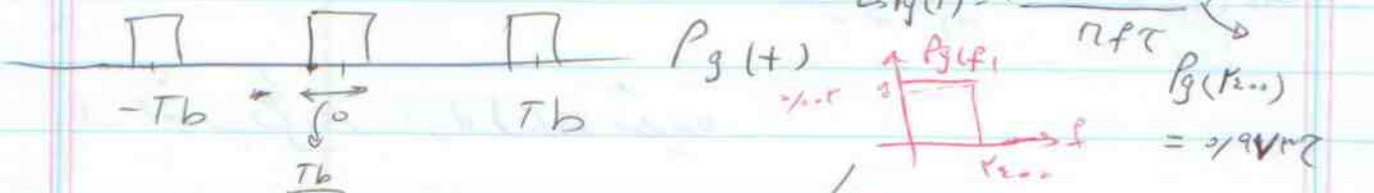
$\frac{1-\alpha}{2T} = \frac{1-\frac{1}{3}}{2T} = \frac{1}{3T} = \frac{3600}{3} = 1200\ Hz$



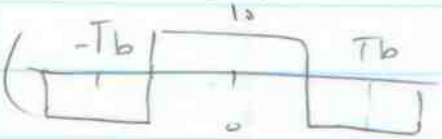


۲) انتخاب $P_g(t)$: بهتر است نوع فیلتر مورد نظر 2400Hz یا نوع فیلتر flat باشد، انتخاب شود.

$$P_g(t)=\begin{cases}1 & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & o.w\end{cases} \qquad \tau=\frac{T_b}{10}$$



(انتخاب $P_g(t)$ آزاد است. در عمل از اسلاید درس بگیرید):



۳) انتخاب فیلترها چرا از (۵) روابط ساده‌تر استفاده نکردیم؟

$$\begin{cases}|H_R|^2=\frac{1}{K_0}\left|\frac{P_r(f)}{10^{-2}}\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{10^{-12}}}=K_1|P_r(f)|\\ |H_T|^2=K_0\left|\frac{P_r(f)}{10^{-2}}\right|\cdot\frac{\sqrt{10^{-12}}}{|P_g(f)|^2\to\tau^2}=K_2|P_r(f)|\end{cases}$$

فیلتر H_R و H_T، نصف بافر فیلتر RC و $\beta=2400$ می‌باشد.

Raised Cosine

یک سیگنال زمان پیوسته (مثلاً صوت) نیاز به دو چیز دارد تا بتوان آن را ذخیره کرد و منتقل کرد. یکی فرکانس نمونه‌برداری و دیگری تعداد بیت‌ها برای هر نمونه.

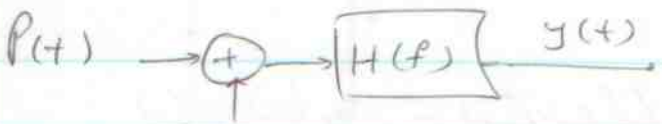
برای فاز دو راه داریم: انتخاب آزاد و انتخاب مقید. انتخاب آزاد یعنی هیچ محدودیتی نداریم.

انتخاب آزاد: بهتر است فاز به طور فعال با گفتار ایجاد فاز نباشد. (تأخیر ثابت)

انتخاب مقید: $H_R(f) = |H_R(f)| \cdot e^{-j 2\pi f t_0}$

به شکل کلی ما می‌خواهیم بازسازی شود با SNR در گیرنده (بدون در نظر گرفتن سایر موارد)

برای ظرفیت کانال مقید گیرنده:



تعریف مسأله: تخمین اینکه سیگنال دریافتی $y(t)$ حاصل از $P(t)$ است یا نیز

$$y(t) = \underbrace{P(t)}_{\text{مقید شده}} + \underbrace{n(t)}_{\text{مقید شده}}$$

$P_0(t)$

$\downarrow F$

$P_0(f) = P(f) \cdot H(f) \xrightarrow{F^{-1}} P_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(f) e^{j 2\pi f t} \cdot df$

$\downarrow T^\circ$ (نمونه‌برداری در لحظه)

$$P_0(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(f) \cdot e^{j 2\pi f T} \cdot df$$

(حالت دیجیتال)

$$P_0^2(T) = \left[\int \sim \right]^2$$

$$\sigma_n^2 = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$ توان نویز خروجی فیلتر شده

$$SNR = \frac{P_0^2(T)}{\sigma_n^2} = \frac{2\left[\int P_0(f)\cdot e^{j2\pi fT} df\right]^2}{\eta \int |H(f)|^2 df}$$

طبق نامساوی شوارتز

$$SNR = \frac{2}{\eta}\cdot \frac{\left[\int P(f) e^{j2\pi fT}\cdot H(f) df\right]^2}{\int |H(f)|^2 df} \times \frac{\int |P(f)\cdot e^{j2\pi fT}|^2 df}{\int |P(f)\cdot e^{j2\pi fT}|^2 df}$$

$$\text{حد بالا} = \int |P(f)\cdot e^{j2\pi fT}|^2 df = \int |P(f)|^2 df = E_p$$

انرژی سیگنال ورودی فیلتر = انرژی سیگنال در خروجی فیلتر

$$SNR = \frac{2E_p}{\eta}\cdot \frac{[\int u\cdot v^*]^2}{\int |v|^2 \cdot \int |u|^2}$$

$$SNR_{max}: \quad u = k v^* \rightarrow P(f)e^{j2\pi fT} = H^*(f)$$

$$\hookrightarrow H(f) = P^*(f)\cdot e^{-j2\pi fT} \rightarrow H(f) = P(-f)\cdot e^{-j2\pi fT}$$

$$\hookrightarrow h(t) = P(T-t)$$

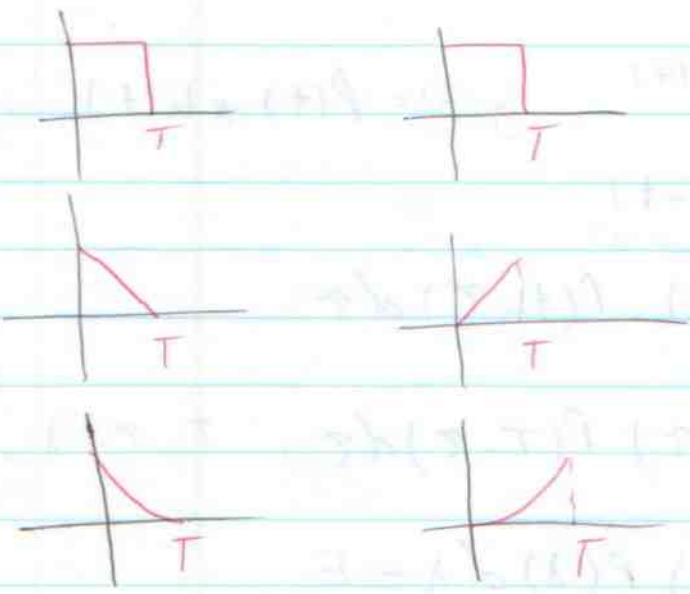
نتیجه: بهترین فیلتری که می‌تواند بیشترین نسبت $P(f)$ را از داخل نویز اضافه شده بیرون آورد، آن فیلتر

۴۹

پاسخ بهینه، فیلتری است که با ضربه‌ای مثل $P(T-t)$ یا شکل موج $P(t)$ فیلتر منطبق یا matched filter

تشکیل می‌شود.

مثال:



$$H(f) \text{ بهینه}: \begin{cases} |H(f)| = |P(-f)| = |P^*(f)| = |P(f)| \\ \angle H(f) = \angle P(-f) - (2\pi T) f \\ \qquad = -\angle P(f) - (2\pi T) f \end{cases}$$

فاکتور فاز خطی

پس فیلتر منطبق دارای پاسخ فاز خطی نیز می‌باشد.

مقایسه: $|H_R(f)|^2 = \frac{1}{K_0} P_N(f)$ ؟ آیا می‌توان $|H_R(f)|^2 = \frac{1}{K_0} P(f) \cdot H_R(f)$ نوشت؟

یعنی $\frac{1}{K_0}$ باید برابر $\frac{1}{2}$ باشد؟

بنابراین فیلتر دریافت H_R را از نوع فیلتر منطبق یا Matched filter در نظر گرفت.

نکته: در بعضی موارد، شکل کلی (ساخت) پاسخ فیلتر منطبق دردسترس است.

برای رفع این مشکل از این نکته استفاده می‌شود که ما خودمان فیلتر را طراحی می‌کنیم. خاص ($t=T$) مدنظر است.

ورودی را که ما در سیستم تولید خودمان می‌کنیم، با فیلتر منطبق ما در لحظه $t=T$ پیچشی خاص می‌زنیم تا آن

ص باشد.

$$P(t) \rightarrow [\ ] \rightarrow y(t) \qquad y(t) = P(t) * h(t)$$

$$h(t) = P(T-t)$$

$$\hookrightarrow y(t) = \int P(T-\tau)\,.\,P(t-\tau)\,d\tau$$

$$\hookrightarrow y(T) = \int P(T-\tau)\,.\,P(T-\tau)\,d\tau, \quad T-\tau = \lambda$$

$$\hookrightarrow y(T) = \int P(\lambda)\,.\,P(\lambda)\,d\lambda = E$$

در حالت کلی که $P(t)$ نویز می‌شود:

$$r(t) = P(t) + n(t) \qquad r(t) \rightarrow [P(T-t)] \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int P(T-\tau)\,.\,r(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(T) = \int P(T-\tau)\,.\,r(T-\tau)\,d\tau$$

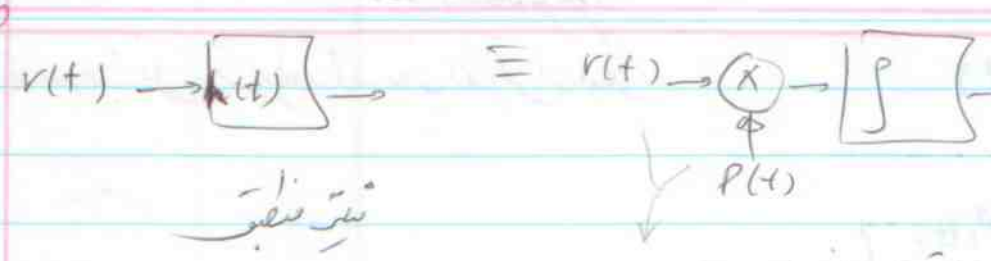
$$\lambda$$

$$\hookrightarrow y(T) = \int \underbrace{P(\lambda)\,.\,r(\lambda)\,.\,d\lambda}_{\hookrightarrow}$$

Cross Cor $r(t)$, $P(t)$

نتیجه: خروجی فیلتر منطبق در لحظه T، حاصل پیچیدگی Cross Cor $P(t)$ و $r(t)$ می‌باشد.

جلسه ۵



شبکه منطبق

ساختار گیرنده: دو حالت ساخت

حالت اول: $r(t)$ کدام $P(t)$ را دارد.

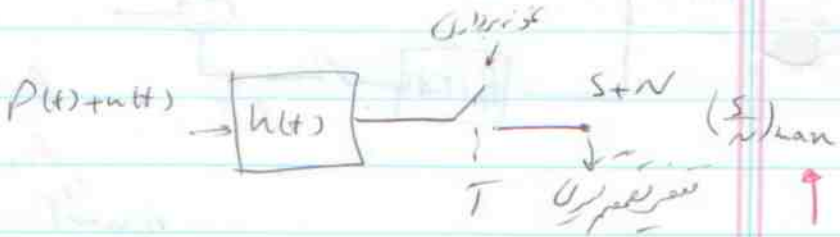
حالت دوم: $r(t)$ کدام $P(t)+n(t)$ است در $P(t)$ به نوفه سفید گوسی

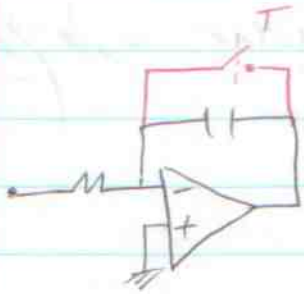
سوال: نحوه Modulator، چگونه یک سیگنال شکل با اندازه بیت بیت؟ چطور

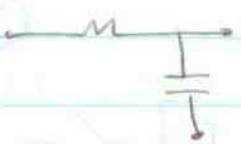
فرض می‌کنیم $P_g(f)$ تقریباً flat است؟ آیا با یک فیلتر مناسب $H(f)$ می‌توان

پاسخ: برای آشکارسازی بهینه باید SNR را ماکزیمم کنیم که منجر به matched filter می‌شود.

$h(t) = P(T-t)$







$P_1(t)$ ، $P_2(t)$ توسعه‌ی حالت قبل به شرایطی که سیگنال ارسالی از یکی از دو پالس

$$r(t) = \begin{cases} P_1(t) \\ P_2(t) \end{cases} + n(t)$$

سیگنال دریافتی

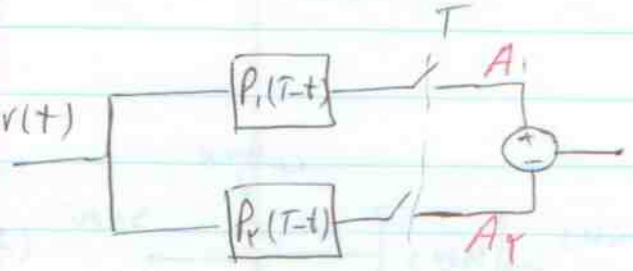
به طور مشابه با حالت قبل می‌توان نشان داد که بهترین عملکرد پردازش در شرایطی که تصمیم‌گیری بر مبنای ماکزیمم‌سازی SNR انجام می‌شود، زمانی اتفاق می‌افتد که روی فیلتر منطبق باشد که روی تفاضل دو پالس $P_1(t) - P_2(t)$ تنظیم شده باشد.

$r(t)$ → $h(t) = P_1(T-t) - P_2(T-t)$ → خروجی در لحظه T

قاعده تصمیم‌گیری:
- اگر P_1 ارسال شده باشد: خروجی
- اگر P_2 ارسال شده باشد: خروجی

آشکارسازی (detection)

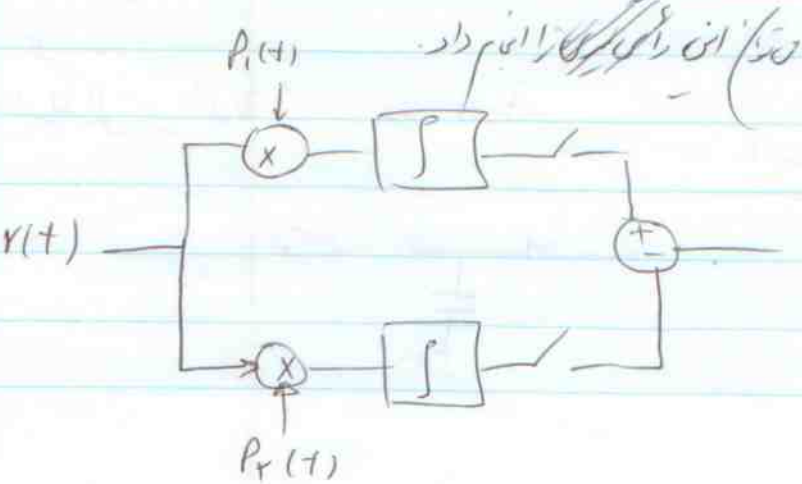
شکل معادل دیگر:



$A_1 > A_2 \rightarrow P_1$

$A_1 < A_2 \rightarrow P_2$

به این طور: Corolator نیز این عمل را انجام داد. آشکارسازی



نکته: دقت شود که طراحی گیرنده دارای نوع زیادی می باشد که بستگی به معیار انتخاب شده (تابع هزینه) دارد. مثلاً روش قبلی با معیار SNR طراحی شد.

چنانچه از معیارهای دیگری مثل MMSE که صادق خطا یا صادق شباهت را ارائه می دهد استفاده کنیم

انرژی سیگنال خطا یا اختلاف ها بررسی کنیم استفاده شود داریم:

$$r(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_r(t) \end{Bmatrix} + n(t)$$

هرکدام کدام انرژی اختلاف کمتر باشد برتر

P_1 انرژی اختلاف $= \int \left[r(t) - P_1(t) \right]^2 dt$

P_2 " " " $= \int \left[r(t) - P_2(t) \right]^2 dt$

این بحث توسعه پیدا کرد حالت M تایی نیز هست:

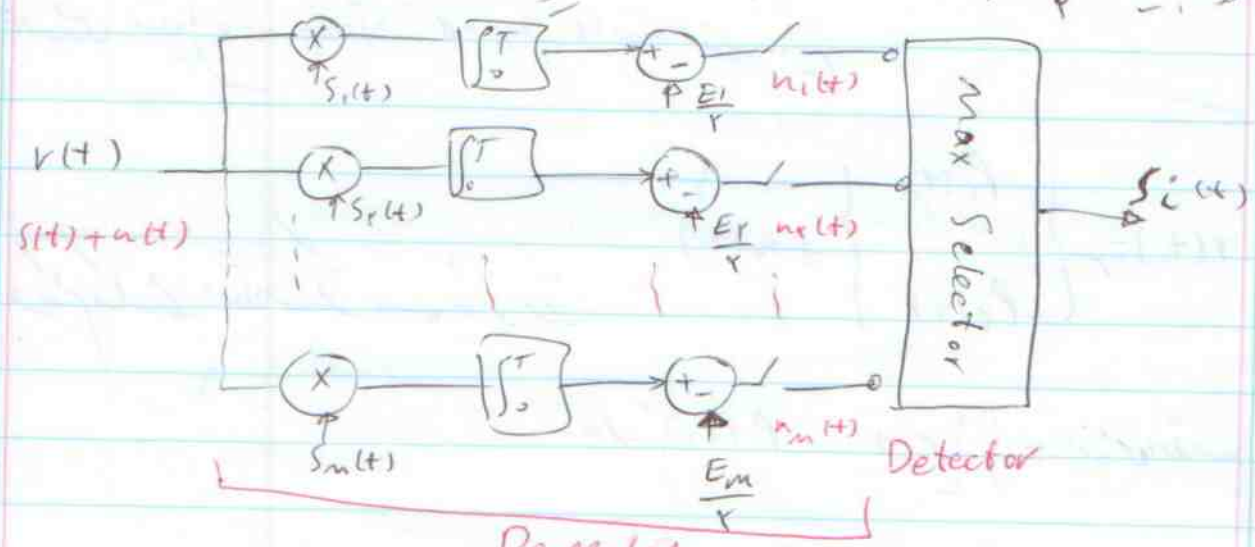
$$r(t) = \begin{Bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \\ \vdots \\ S_M(t) \end{Bmatrix} + n(t)$$

$$Err_i = \int \left(r(t) - S_i(t) \right)^2 dt = \int_0^T r^2(t)\,dt - 2\int_0^T r(t).S_i(t)\,dt + \underbrace{\int_0^T S_i^2(t)\,dt}_{E_i}$$

$$\hookrightarrow Err_i = E_r - 2\left[Corr\left(r(t), S_i(t)\right) - \frac{E_i}{2} \right]$$

Err_1 ... Err_M را به بردار Ev و Min آن را انتخاب می‌کنیم.

Ev در تصمیم‌گیری نقش دارد.



نکته: می‌توان داده‌ها را در مشخصات آماری نویز طی پروسه‌ی $n(t)$ با نویزهای پراکنده شده $n_1(t)$ تا $n_M(t)$ طی کرد.

$\frac{\eta}{2}$

if $n(t) \sim N(0, \sigma^2)$ ⇒

$n_1(t) \sim N(0, \sigma^2)$

$\vdots$

$n_M(t) \sim N(0, \sigma^2)$

سوال: اتوکورلیشن نویز با خودش چه می‌شود؟ آیا برای کیفیت سیگنال $P(t)$ می‌توان از اتوکورلیشن $R(t)$ استفاده کرد؟

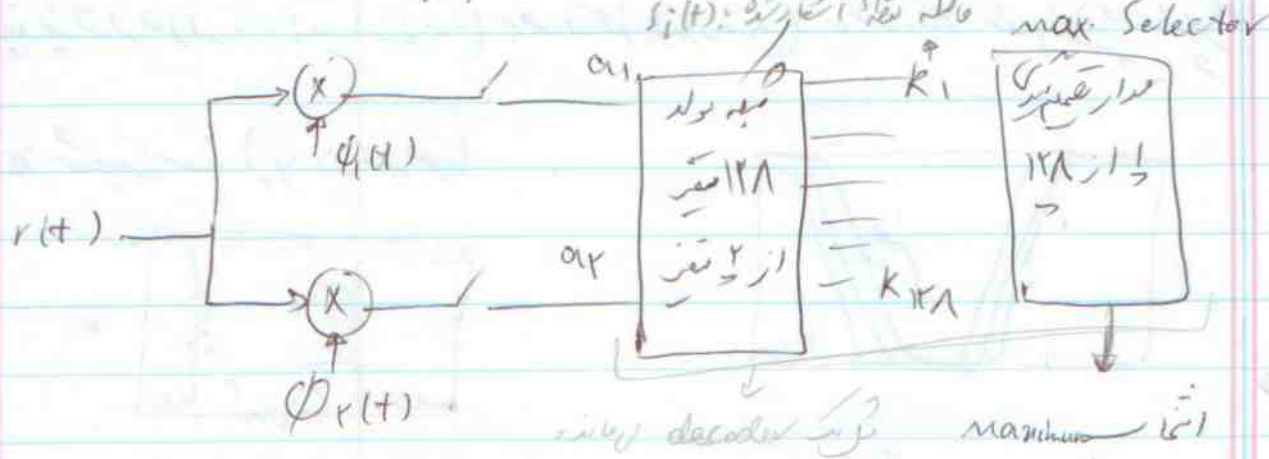
نکته: چنانچه سیگنال‌های $s_1(t)$ تا $s_M(t)$ را بتوان در یک فضای N بعدی که $M \geq N$ است نوشت؛ آن‌گاه برای محاسبه گیرنده $r(t)$ با سیگنال‌ها، گیرنده $r(t)$ را به چه صورتی فضا انجام داد:

$$\text{فضا } N \text{ بعدی} : \begin{Bmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_N(t) \end{Bmatrix} \quad s_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot \phi_j(t)$$

$s_i(t) = \langle a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3} \rangle_{\phi}$

$$N=2 \rightarrow \begin{cases} \phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_c t \\ \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_c t \end{cases} \leftarrow \begin{Bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_{128}(t) \end{Bmatrix} : 128\text{-QAM}$$

مثال:

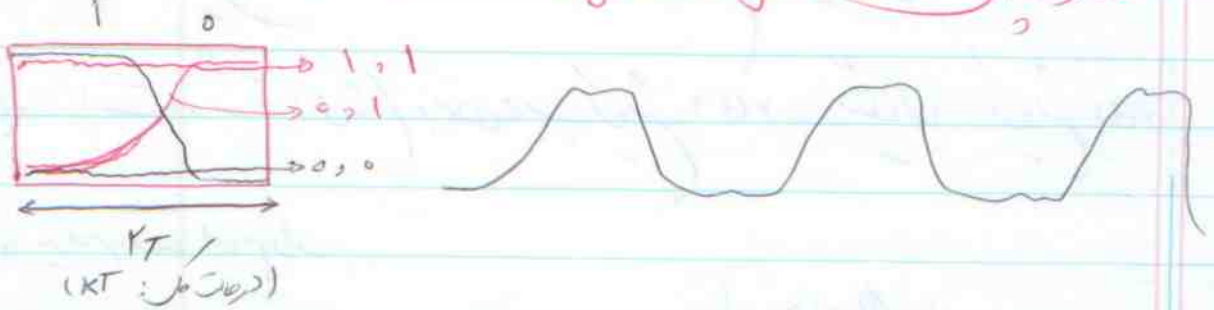


$$k_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot a_j \,,$$

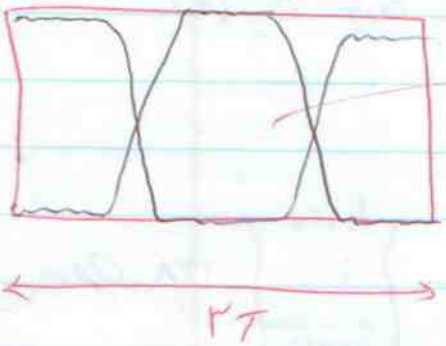
$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot \phi_j(t)$$

$$N=2 \rightarrow \begin{cases} k_1 = a_{11} \cdot a_1 + a_{12} \cdot a_2 \\ k_2 = a_{21} a_1 + a_{22} a_2 \\ k_3 = a_{31} a_1 + a_{32} a_2 \end{cases}$$

نمودار چشمی : eye diagram



شکل موج فعلی روی آن است

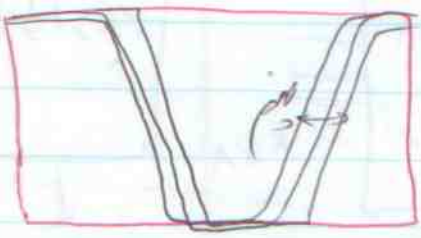


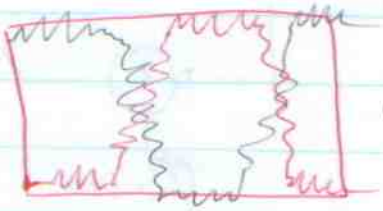
عوامل خراب سیگنال

۱) ISI : وجود ISI باعث از دست رفتن عرض پالس می‌شود.

همانطور که فعلاً (از ۰ به ۱ یا از ۱ به ۰) به صورت خطی (نوار سبز) باشد باعث می‌شود که عرض نوار کم شود

ISI شدیدتر است (پهنای نمودار)





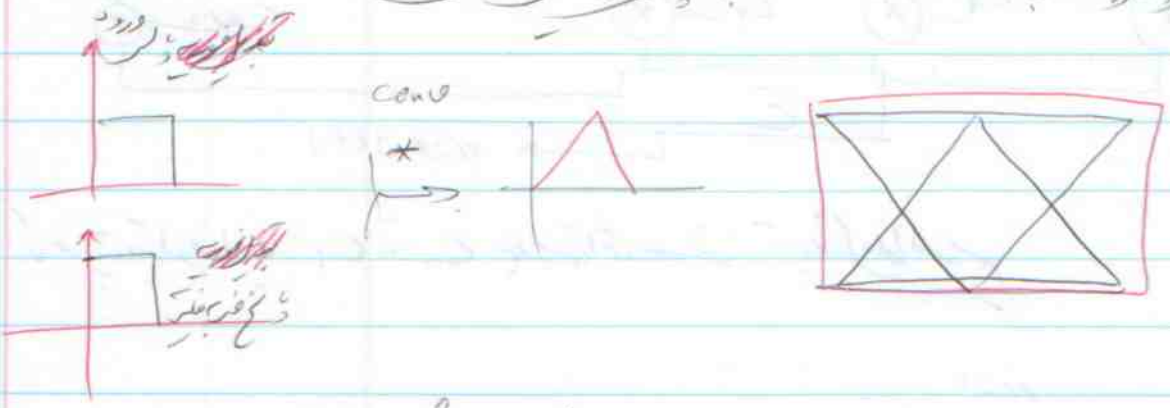
۲) نویز: باعث عریض شدن عرض نوارها در راستای عمودی می‌شود (چشم بسته می‌شود)

کلاً هرچه چشم بازتر باشد بهتر است.

- در راستای افقی ← بهتر ISI
- در راستای عمودی ← بهتر نویز

بهترین نقطه برای نمونه برداری از سیگنال، جایی است که چشم بازترین وضعیت خود را در راستای عمودی دارد.

- چند نوع matched Filter برای پالس های متفاوت بررسی شود.



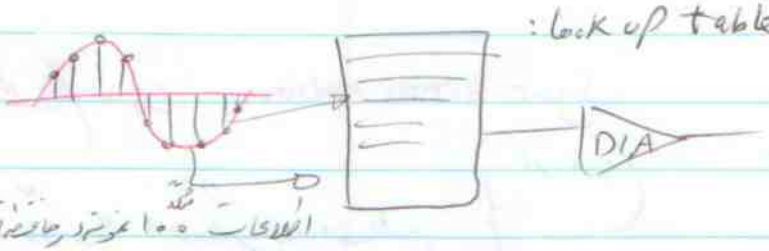
توجه: اطلاعات بصورت Free run روی اسکوپ نمایش داده می شود.

ساخت شکل موج های پایه در فضای سیگنال

N بعدی: $\begin{cases} \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{cases}$

دو راه حل برای ساخت:

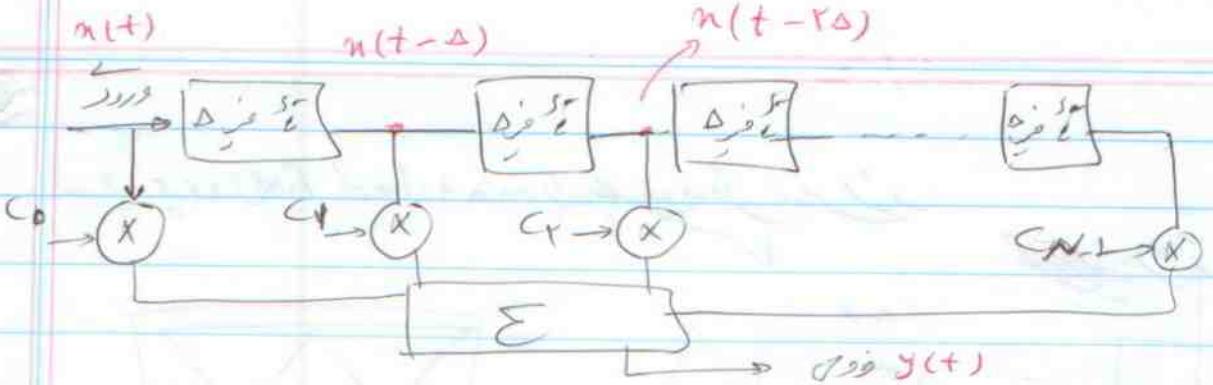
۱- ذخیره سازی شکل ها در look up table:



۲- بر اساس اصول ستنز روابط ریاضی یا مدارها یا فیلترها سه آنالوگ یا دیجیتال

یک ساختار مداری پایه که قادر به ساخت تعدادی از شکل موج ها و یا توابع تبدیل مورد نیاز باشد، فیلتر transversal است.

← یک فیلتر دیجیتال FIR



که در آن مقادیر ضرایب C_i ها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند تا به شکل دلخواه در آیند.

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} C_i \cdot x(t - i\Delta)$$

$$\hookrightarrow Y(f) = \sum_{i=0}^{N-1} C_i \cdot X(f) \cdot e^{-ji\Delta w}$$

(فیلتر ناگهان)

$$\hookrightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \sum C_i e^{-ji\Delta w}$$

فیلتر ناگهان این که این روش مصرف می‌کند به تعداد نمونه‌هایی که برای تخمین دارد.

همگام‌سازی : Synchronization

* نیاز به کاربرد فاز دارد Coherent وقتی با دو شده داریم.

دریافت دو روش دریافت داریم: (از نوع) ۱/ Non-coherent ۲/ نامنسجم

↓

بدون نیاز به کاربرد (با استفاده از Push Det)

* ضرب دو کاربرد یکدیگر (در فرستنده و گیرنده) با هم ضرب آن می‌شود. (البته با پهنای فیلتر LP رد می‌شود)

دمدولاتور فرستنده:

یادآوری: $\cos\omega_c t \times \cos\omega_c t = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\omega_c t}{2} \xrightarrow{LP} \frac{1}{2}$

$\cos\omega_c t \times \cos(\omega_c t + \phi) = \frac{1}{2}\left[\cos\phi + \cos(2\omega_c t + \phi)\right]$

$\xrightarrow{LP} \frac{\cos\phi}{2}$

بنابراین در دمدولاتور فرستنده، باید ω_c و ϕ را حذف کنیم

دو روش کلی ←
- ارسال جداگانه اطلاعات کاریر (Pilot)
- ۲ برچسبی کاریر (کلک) از داخل سیگنال مدوله شده $m(t) = a(t)\cos\omega_c t$ ASK

روش ۱:

سوال: وقتی Pilot دریافت می‌شود، فاز نامعینی (فازی) ایجاد کرده، آیا شکل ایمپالس‌ها درست است یا خیر؟

(نیست، چون) خود اطلاعات هم به (فاز) اندازه نامعینی فاز دارد.

روش ۲: باید بتوانیم اطلاعات $a(t)$ و کاریر $\cos\omega_c t$ را از یکدیگر جدا نموده تا از نامعینی فاز آن تأثیر نگیرد.

روش‌های متعدد ← مانند Square law

Square Law: $r(t) = a(t)\cos w_c t$ $\quad a \in \{\pm A\}$: PAM سیگنال

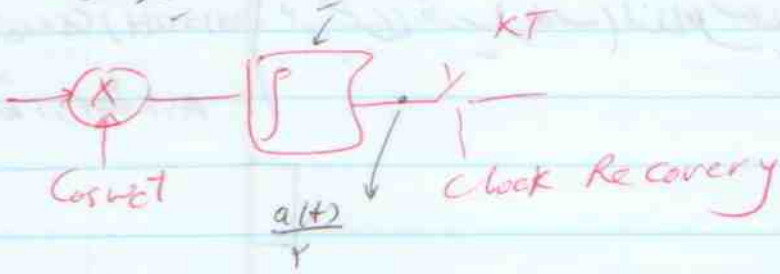
$r(t) \rightarrow$ [غیرخطی] $\rightarrow r^2(t) = a^2(t)\cos^2 w_c t = A^2 \cos^2 w_c t$

[غیرخطی] $f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2$ مشتق‌گیر

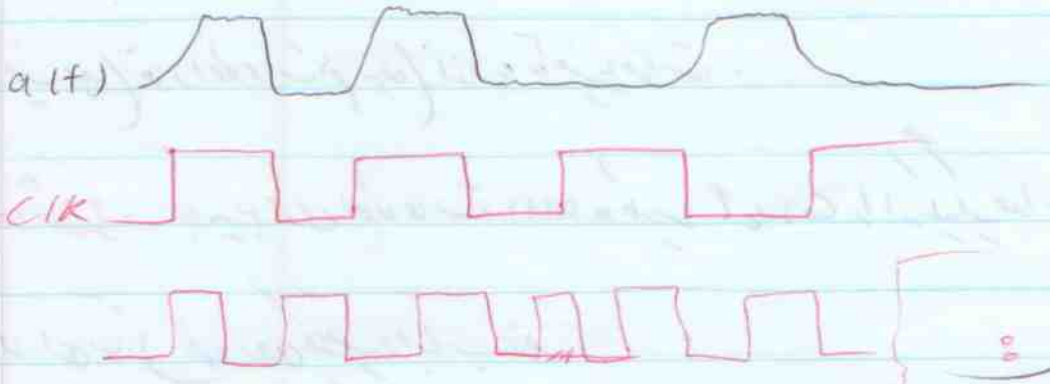
$= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos 2w_c t$

$r^2(t) \rightarrow$ [عبور از فیلتر $\cos 2w_c t$] $\rightarrow$ [$\div 2$] $\rightarrow \cos w_c t$

مثال: علاوه بر Carrier recovery بایستی clock recovery نیز (برای Sampling در گیرنده) صحیح انجام شود.



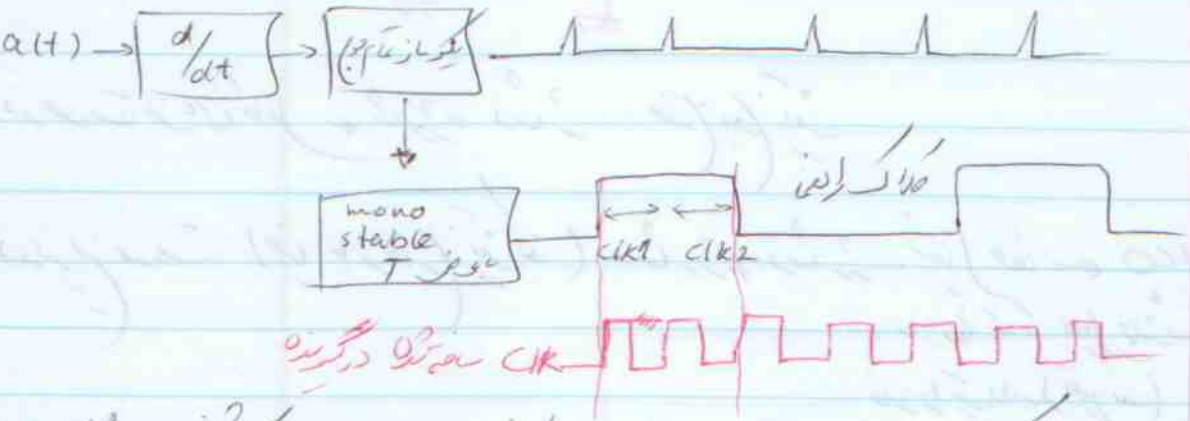
مثال: در حالت انتقال باند پایه (PAM)



گیرنده نوری:

در زمان بیت‌های $a(t)$ را تشخیص داده و با کمک CLK نمونه‌برداری می‌شود.

به ۵ جدا می‌شود.



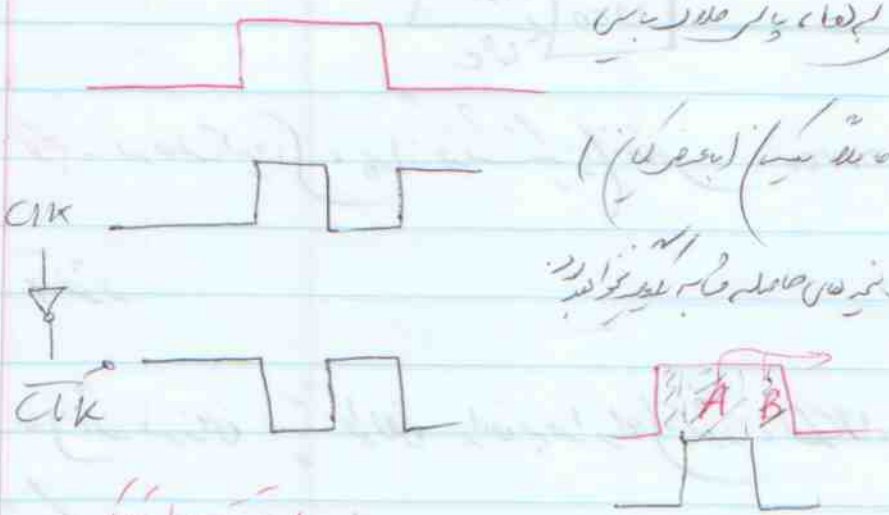
برای اینکه نوسانی در بازه T با شروع لبه Clk پیدا کند شرط $\frac{T}{2}$ است.

حال می‌خواهیم کلاک اولیه را از خود اطلاعات با کلاک ساخته شده بازسازی کنیم.

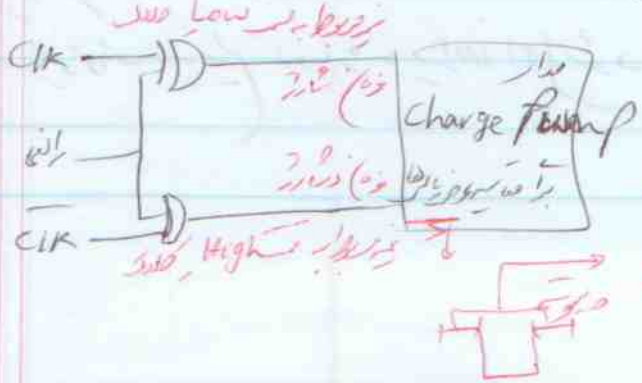
در صورت اختلاف فاز لبه‌ها، پس کلاک بیش

پس اولیه را به دو نیمه کلاک (با عرض کم)

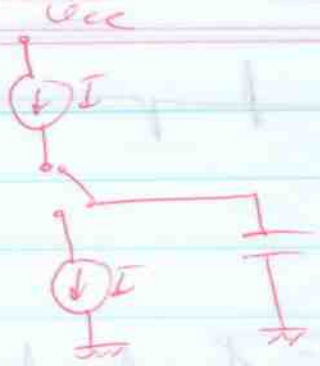
تقسیم کنیم. در این صورت نیمه‌های حاصله حاشیه یکدیگر خواهند بود.



ساخت مداری:



charge pump :



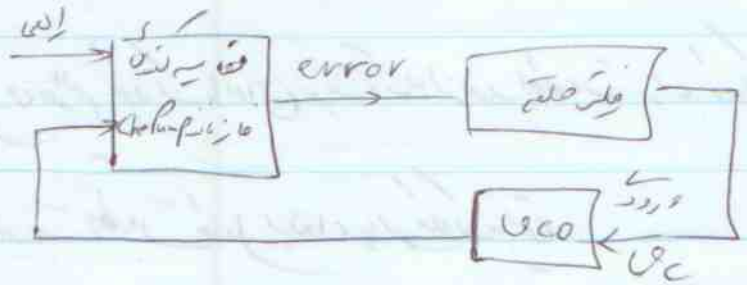
در صورت نبودن خازن بار دیگر : خازن بعد از تغذیه

در غیر این صورت (اضافه بار خازن تغذیه کند) بار دیگر : شارژ خطا به VCO

به سازنده کلاک اجازه میدهد تا

خازن را تغذیه دهد (تقویت لعه).

PLL (Phase Locked Loop)



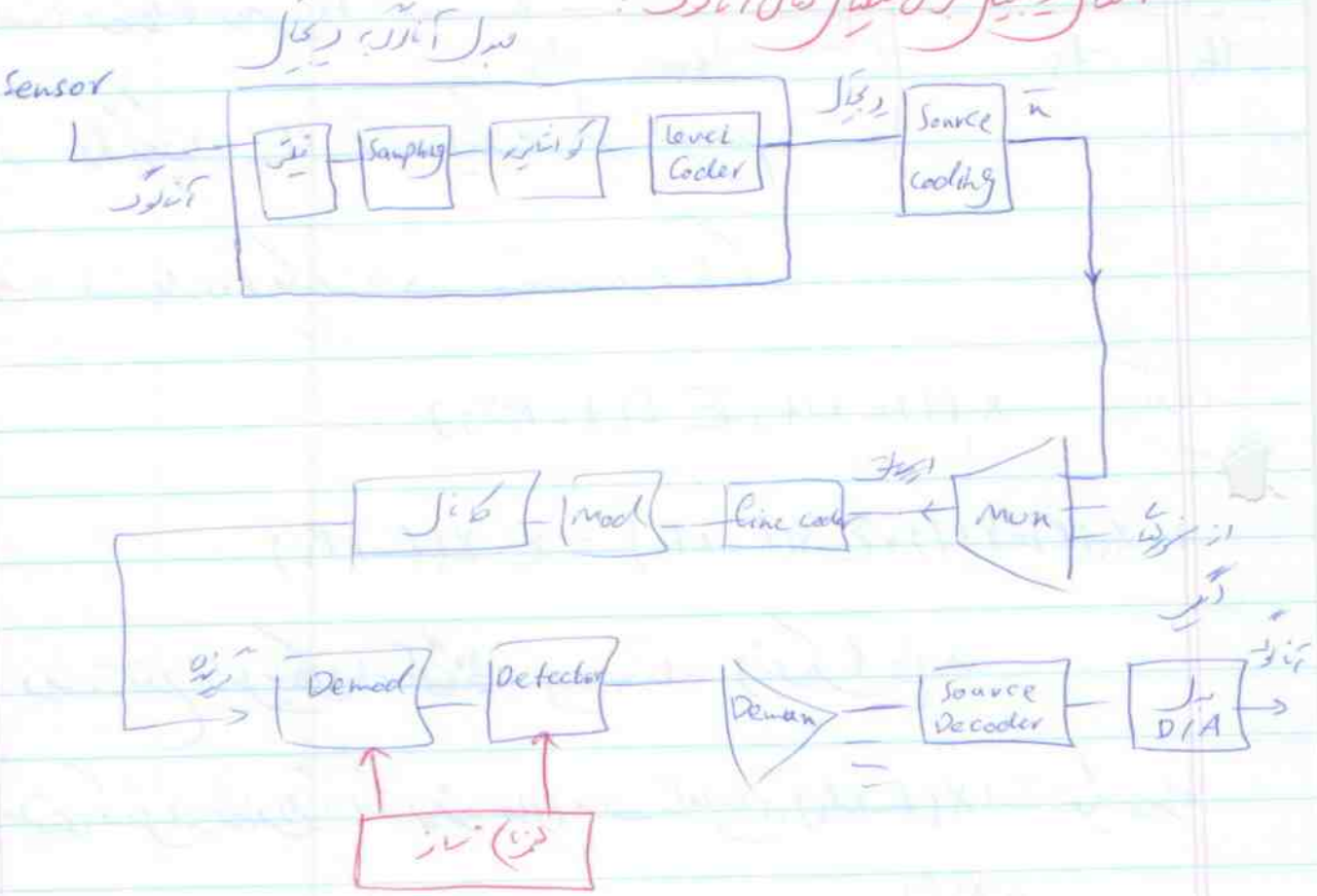
توجه : در حالت ایده آل ، در ابتدا تفاوت فاز خطا ، error صفر می شود و فاز ثابت

می شود.

حال اگر در زمان بسیار طولانی ورودی به مدار اعمال شود ، VCO ، Drift پیدا کند و فاز

تغییر کند . بنابراین دوباره باید ورودی اعمال شود.

انتقال دیجیتال برای سیگنال‌های آنالوگ:



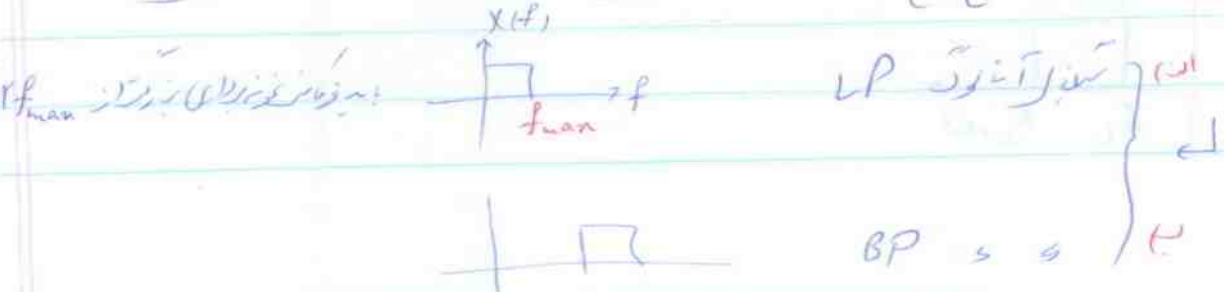
مبدل آنالوگ به دیجیتال:

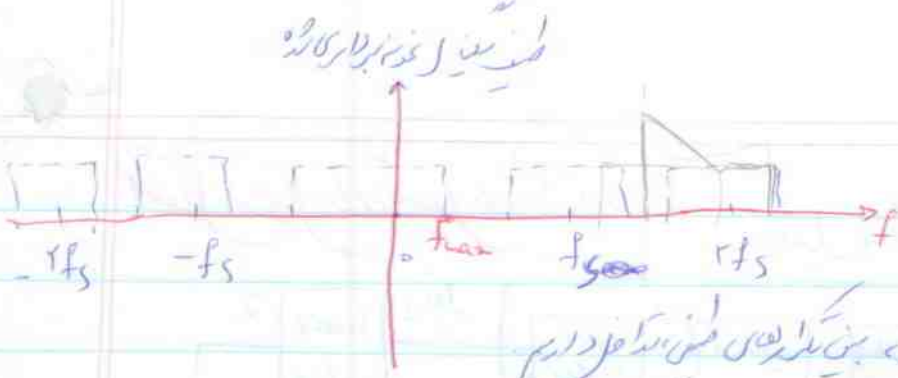
نکات لازم برای تبدیل آنالوگ به دیجیتال:

۱) نحوه نمونه‌برداری صحیح:

→ Perfect Reconstruction

برای نمونه‌برداری صحیح که بتوان اطلاعات از سیگنال آنالوگ حفظ شود (بازیابی کامل سیگنال):





الف) نمونه برداری با نرخ f_s

اگر f_s کوچکتر از $2f_{max}$ باشد، بین تکرارهای طیف تداخل داریم.

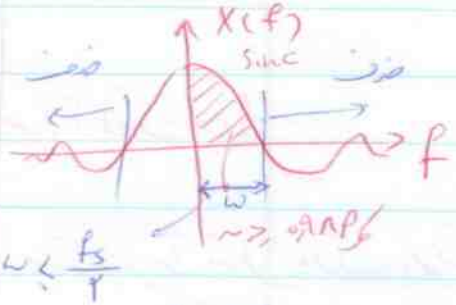
توجه: نمونه برداری در یک حوزه ← تناوب در حوزه دیگر

نمونه برداری: $x_s(t) = x(t) \sum \delta(t - kT_s)$

$\rightarrow X_s(f) = X(f) * \sum \delta(f - kf_s) = \sum X(f - kf_s)$

در صورت وقوع تداخل بین تکرارها، آن را aliasing (تاخوردگی) خوانند.

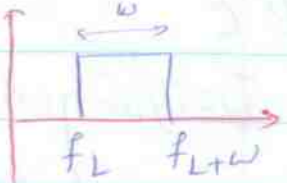
علتی که قبل از نمونه برداری انجام می‌شود برای حذف تداخل‌های $X(f - kf_s)$ است. این کار به واسطه



حذف (نابودسازی) فرکانس‌های بالا توسط فیلتر LPF انجام می‌شود.

فیلتر anti aliasing

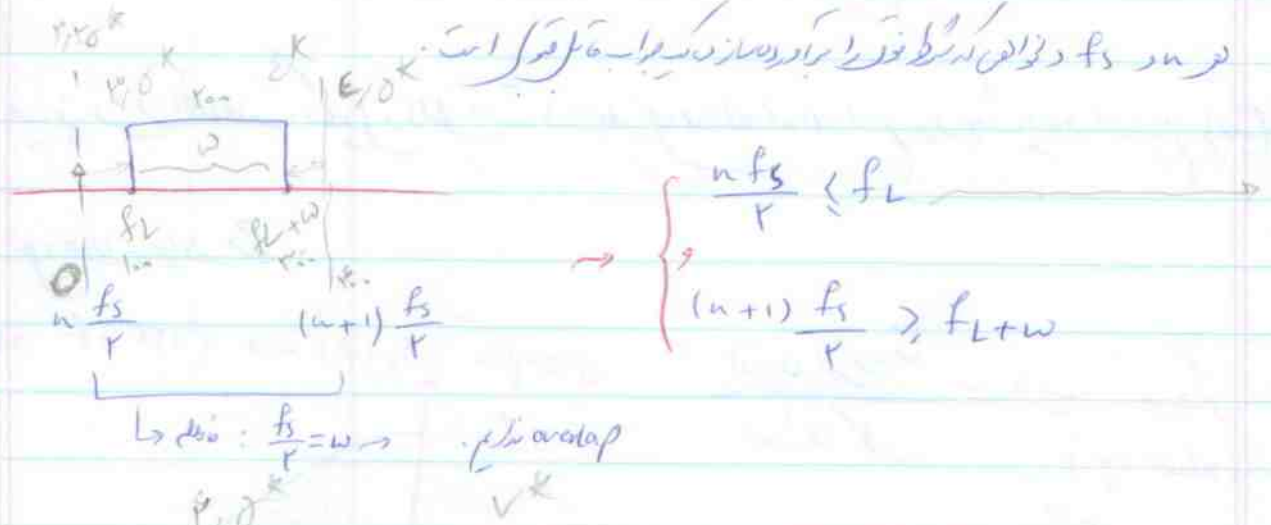
ب) اگر پهنای باند سیگنال کمتر از $f_{L+\omega}$ باشد، نمونه برداری بدون aliasing امکان‌پذیر است.



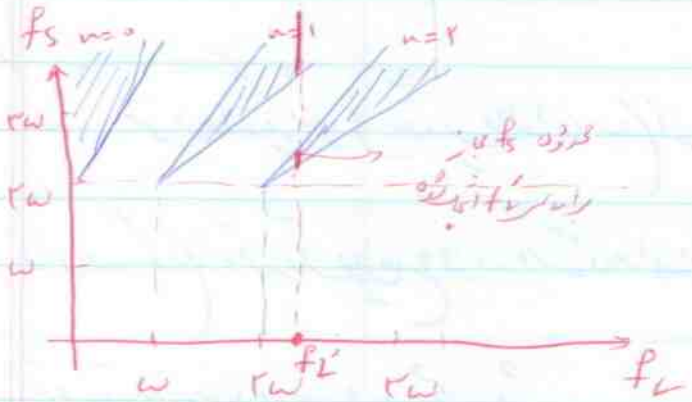
برای عدم f_s و فرکانس f_s نباید از $2W$ باشد.

$$f_s \geq 2(f_L+W) \xrightarrow{\text{ساده}} f_s \geq 2W$$

برگردانی که بخشی از $\frac{f_s}{2}$ قرار از f_L و بخشی دیگر از f_L+W قرار گیرد.

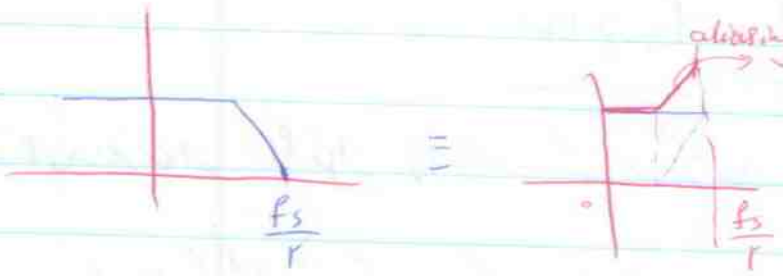


$$\Rightarrow \frac{2(f_L+W)}{n+1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{n}$$



برای سیگنال با فرکانس f_L تا f_{L+W}.

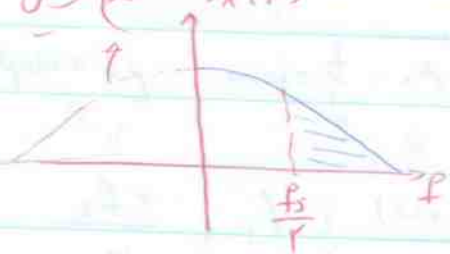
یادآوری: از نظر تئوری اثر aliasing کم یا نزدیک به صفر میشود اگر فرکانس نمونه‌برداری حداقل دو برابر $\frac{f_s}{2}$ باشد.



همانطور که از اطلاعات سیگنال به دلیل استفاده از فیلتر antialiasing از ورود به بیت ایجاد اعوجاج (نویز) aliasing خواهد شد.

$D = \frac{\text{انرژی خارج شده}}{\text{انرژی کل}} = \frac{\text{ضریب تاخوردگی}}{(aliasing)}$

$S_x(f) \rightarrow PSD\ of\ x(t)$ (تقریبی)

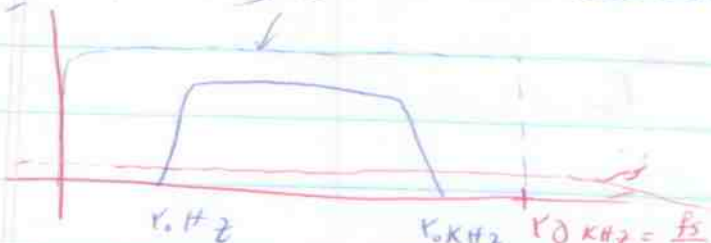


$$D = \frac{\int_{\frac{f_s}{2}}^{\infty} S_x(f)\,df}{\int_0^{\infty} S_x(f)\,df}$$

نکته: حتی در صورتی که سیگنال به‌طور دقیق از $\frac{f_s}{2}$ نداشته باشد، باز هم از فیلتر aliasing برای نمونه‌برداری استفاده خواهد شد.

برای کم کردن تاخوردگی نویز خارج از باند استفاده خواهد شد.

فیلتر antialiasing



تاخوردگی‌های بین دو نویز کم می‌شود.

همچنین برای نمونه‌برداری مطلوب خواهد شد.

$f_s = 50KHz$

عوامل ایجاد نویز یا اعوجاج در انتقال و پردازش اطلاعات آنالوگ:

۱. aliasing ناشی از نمونه برداری ← راه حل ← ۱. از فیلتر ضد تاخوردگی
۲. نمونه برداری با فرکانس نمونه برداری کمتر از ۲ برابر

۲. نویز (خطای) ناشی از کوانتیزاسیون

۳. اعوجاج ناشی از روزنه Aperture

توجه: روزنه کوچکتر باعث اعوجاج کمتر است. نمونه در یک نقطه از زمان گرفته می‌شود.

۴. نویز و اعوجاج ناشی از کانال (در حین انتقال رخ می‌دهد)

۵. خطای ناشی از بازسازی (interpolation) ← ۱. فیلتر مناسب (از درجه بالا) انتخاب کنید

راه حل کلی:

۱. ← ۱. از تعداد بیت یا سطوح کوانتایز بیشتر استفاده کنید
۲. ← ۱. انتخاب نوع صحیح کوانتایزر ← کوانتایزر غیریکنواخت

۳. ← استفاده از پیمودهای باریکتر ← استفاده از نوسان کننده‌های سریعتر

۴. ← اعوجاج ← اکوالایزر
نویز ← انتخاب مدولاسیون مناسب
کدینگ کانال

$x(t)$ → [نمونه‌بردار] → $x[n] = x(nT_s) = x(t)\big|_{t=nT_s}$: ۲ راه‌های مدل از رونده

روش ایده‌آل نمونه‌برداری

به لحاظ ریاضی نتایج مدرسه این مدت نقطه‌ای را دارد. فقط در نمونه‌بردار ایده‌آل ریاضی است.

T_s ↔ ↑ ↑ ↑ ↑ — با ضرب این قطار ضربه در $x(t)$ نمونه‌های لحظه‌ای آن را از آن بدست آید

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum \delta(t - nT_s) = \sum x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s)$$

در عمل نمی‌توان نتایج مدرسه را پیاده‌سازی کرد.

$x(t)$ → [ ] → $x'[n]$ → [کوانتایزر] → $x[n]$

$t = nT_s$

Sample & hold

کلید واقعی نیاز به یک بازه‌ی زمانی غیر صفر دارد.

بازه‌ی زمانی dt برای کلید

$x(t)$ — موج‌ها

نمونه ایده‌آل

نمونه واقعی

ایده‌آل واقعی

nT_s

مدارات ویژه‌ای تحت عنوان Sample & hold برای نمونه‌برداری تعبیه شده‌اند.

باید حتماً قبل ورودی از A/D

۲) انواع نویز ناشی از کوانتیزه:

کوانتیزه برای تبدیل دامنه نمونه‌های حاصله به صورت بیت استفاده می‌شود. مثل رشته‌ی اعداد دودویی

دارای یک سری level های مجاز و تعریف شده‌ای هستند که تعداد آنها عموماً توانی از ۲ می‌باشد.

یک کوانتیزه n بیتی (مثل A/D n بیتی) $\Rightarrow M = 2^n$

علاوه بر تعداد سطوح فاصله آنها از همدیگر (دامنه نویز (خطای) ناشی از کوانتیزه)

انتخاب سطوح ← از انتخاب نواحی یکنواخت برای سطوح ← کوانتیزه یکنواخت

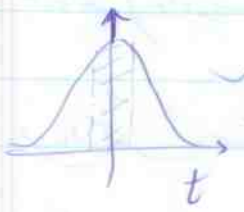
غیریکنواخت ← غیریکنواخت

Source Coding برای

ادغام شود چون احتمال سطوح

یکسان نیست و باید توجه به

pdf ورودی آنالوگ شود تعیین شود

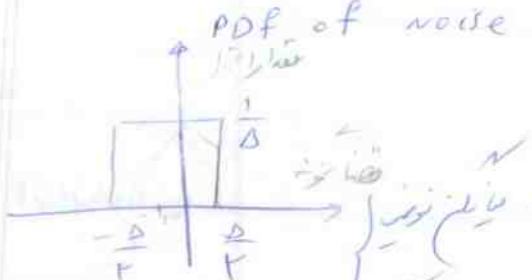


۸ بیتی ← ۲۵۶ سطح

فاصله‌ی سطوح: $\frac{U_{Ref}}{2^n - 1}$

الف) سطوح یکنواخت: نویز کوانتیزاسیون با محدوده $(\pm \frac{\Delta}{2})$ خواهد بود. Δ فاصله‌ی سطوح

و با فرض توزیع یکنواخت سیگنال ورودی، نویز کوانتیزه نیز توزیع یکنواخت خواهد داشت.



میانگین نویز = ۰

واریانس نویز = توان نویز = $\frac{\Delta^2}{12}$

بدین ترتیب توان کوانتیزه را حساب کردیم که هر چه بیت بیشتر شود، عملکرد بهتر کوانتیزه را نشان می‌دهد

اشکال کوانتیزه کردن:

در سیستم‌های دیجیتال که محدوده تغییرات سیگنال خیلی زیاد است، مجبوریم که محدوده دینامیکی برای ورودی کوانتیزه در نظر بگیریم. ولی به دلیل محدودیت‌های بیت، تعداد سطوح را نمی‌توان زیاد کرد. در نتیجه فاصله سطوح از یکدیگر زیاد می‌شود.

وقتی فاصله سطوح زیاد باشد، نسبت $\frac{S}{N}$ خیلی کم می‌شود و کیفیت افت می‌کند.

می‌خواهیم (به عبارت دیگر استاندارد ما این است) که از کل سطوح به کل زده شود.

ولی با افزایش تعداد بیت، $\frac{S}{N}$ نیز بهبود می‌یابد.

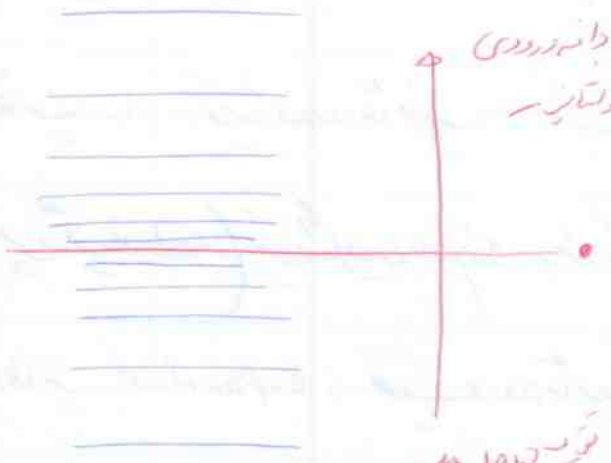
تعریف: کیفیت عملکرد سیستم وابسته به ورودی آن (یعنی صدای گفتار) و کانال مخابراتی می‌باشد.

تعریف: اصلاح سیستم به گونه‌ای که $\frac{S}{N}$ سیستم متناسب از کی باشد (کمیت عددی مثبت و قابل قبول باشد).

۴۰

راه حل: استفاده از کوانتایزر غیریکنواخت

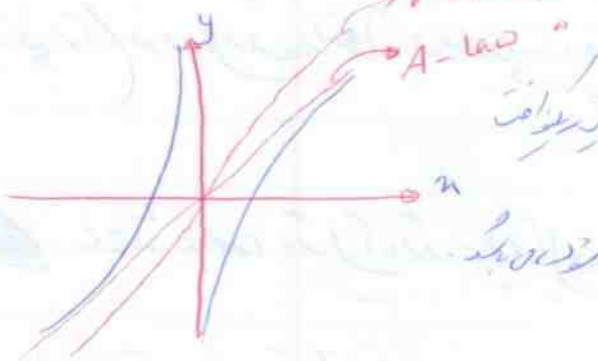
کمترین سطح کوانتایز برای کدهای تندور برای کدهای تندور با بیت N برابر $\frac{2}{N}$ می‌باشد



روش) تک بیت کردن که برای تک بیت $\frac{2}{N}$

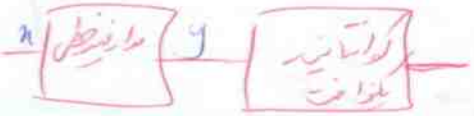
باید: خروجی: y، ورودی: x

$$y = k_1 \ln(k_2 x)$$



نکته: یک کوانتایزر غیریکنواخت معادل با یک کوانتایزر یکنواخت

و یک مدار جانبی که اختلاف سطوح توسط آن انجام می‌شود می‌باشد



پیاده‌سازی تکه‌ای ایده‌آل $y = k_1 \ln k_2 x$ مشکل است. دو تقریب ساده‌کننده رایج زیر را

استاندارد می‌کنیم: A-law (۱

$$y = \begin{cases} \frac{1+\ln Ax}{1+\ln A} & x \geq \frac{1}{A} \\ \frac{Ax}{1+\ln A} & x \leq \frac{1}{A} \end{cases}$$

که $A = 87.7$ تنظیم

اروپایی ژاپنی

آمریکا

۲- μ-law :

$$y = \begin{cases} y = \dfrac{\ln(1+\mu x)}{\ln(1+\mu)} \\ \mu = 100 \end{cases}$$

تکنیک فشرده سازی Compressor ایجاد می کند

وظایف : تقویت ورودی های ضعیف ، تضعیف ورودی های قوی

(برای دیکدینگ برای عکس) تمام عملیات انجام شده به طریق عکس عمل می کند

وظایف expander : تضعیف ورودی های ضعیف ، تقویت ورودی های قوی

(برای نمونه) ورودی عکس فوق را توان دو برای ساده سازی کرد ، آن را Companding می نامند.

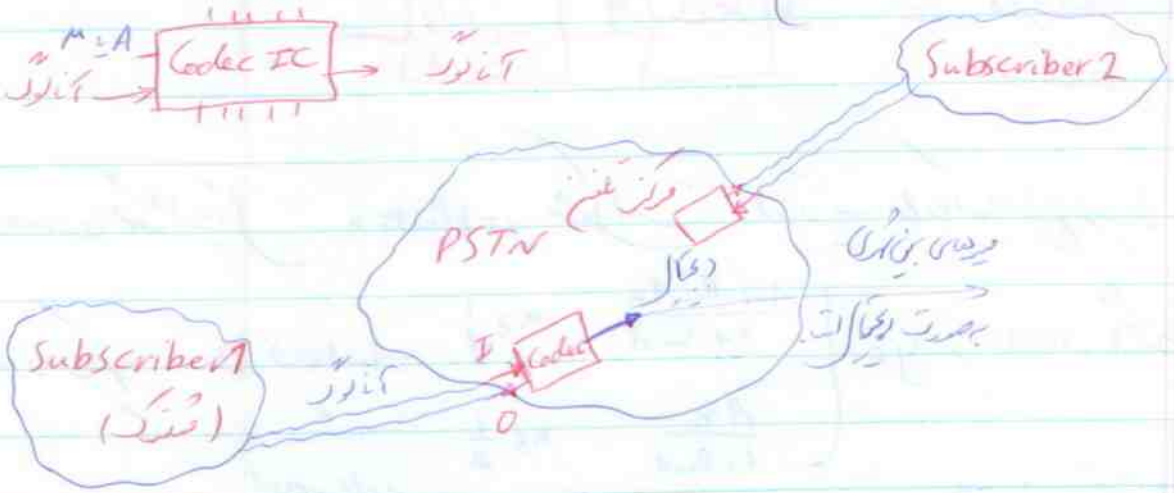
اتصال به خط مشترک

A/D فرایند : IC — IC

Compander A/D

IC یک Codec ، تبدیل آنالوگ به دیجیتال

برعکس برای سیستم تلفن با توان A یا μ را به عهده دارد



حرف P

Pulse Code Modulation

PCM

بعد از کوانتایز، اطلاعات نقطه به صورت سیگنال ارسال شونده به آن

PCM ← تکنیک ← نرخ خروجی: ۸ KHz

PCM ← استاندارد ← BW = ۴ KHz ← A/D ← ۶۴ kbit/sec

تبدیل دیجیتال

Multiplexing: به منظور ارسال یا دریافت چند سیگنال برای چند کاربر از طریق یک کانال واحد

نرخ ——— تقریبا ۳۰۰۰ کیلومتر

انواع تقلب:

طول موج	زمان	فرکانس	کد
WDM	TDM	FDM	CDM
فیبر نوری	ارسال در بازه‌های متعدد	ارسال اطلاعات در نرخ متعدد	Code Dintion Multiplexing
	تخصیص بازه‌ها به صورت ثابت استفاده می‌شود	فرکانس‌های متعدد	

TDM:

Time slot تقسیم می‌شود به بازه‌های یک

به صورت نوبتی و دوره‌ای اطلاعات در T.S ارسال می‌شود

که برای یک مشترک خاص اختصاص داده می‌شود

دو پارامتر مهم شبکه‌های ارسال اطلاعات را نام ببرید (حفظ)

باید بیشتر از سرعت ارسال اطلاعات تعریف شود.

در موبایل تلفن TDM و FDM مورد استفاده قرار می‌گیرد

دو روش کاری برای پیاده‌سازی:

۱/ E-1 : به کانال E-1 شامل ۳۲ کانال PCM می‌شود که ۳۰ کانال برای مکالمه و ۲ تا برای کنترل و سیگنالینگ ← اروپایی و ایران

۲/ T-1 ← ۲۴ کانال که به کدام برای مکالمه یا کنترل استفاده می‌شود.

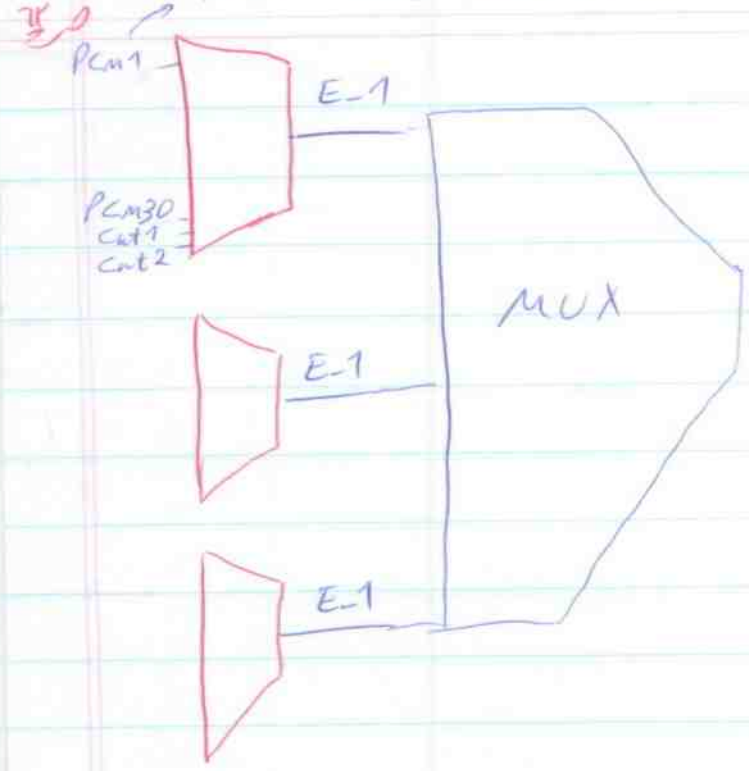
خطوط leased line ، خطوط اختصاصی (از این نوع سرعت) در واقع همان خطوط E-1 هستند

سرعت تعریفی طرف.

برای ADSL: باید antialiasing را با توجه به پهنای باند تعریفی (حداکثر ۴ KHz) اعمال کرد.

تمام Tine-slot ها به یک کاربر اختصاص می‌یابد.

Pulse Codec Modulation



فصل ۱۵ ← ۲ ثانیه

فصل ۱ ← ۱ ثانیه

فصل ۲ ← ۱ ثانیه

فصل ۴ ← ۱ ثانیه

فصل ۲ (بازدهی)

فصل ۱ (کلیات)